

Р. Б. Салимов

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И ТЕХНОЛОГОВ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 51
ББК 22.1
С 16

Салимов Р.Б. **Математика для инженеров и технологов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 484 с. — ISBN 978-5-9221-1156-0.

Книга рассчитана на студентов вузов, обучающихся на строительных, технологических и других родственных специальностях и изучающих курс математики в объеме примерно 350 часов аудиторных занятий с разбиением последних поровну на лекционные и практические. Она содержит все основные разделы математики, изучаемые студентами названных специальностей: элементы аналитической геометрии и линейной алгебры, дифференциальное и интегральное исчисления, основные сведения по уравнениям математической физики.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области математики и ее приложений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	12
Глава 1. Элементы векторной алгебры	13
§ 1.1. Действительные числа, числовая ось	13
§ 1.2. Декартовы координаты. Полярные координаты.	14
§ 1.3. Векторы, линейные операции над ними	15
§ 1.4. Проекция вектора на ось	18
§ 1.5. Разложение вектора по базисным векторам	18
§ 1.6. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями	20
§ 1.7. Длина вектора. Расстояние между двумя точками	20
§ 1.8. Направляющие косинусы вектора	21
§ 1.9. Скалярное произведение, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов	22
§ 1.10. Определители второго и третьего порядков. Векторное произведение, условие коллинеарности двух векторов, площадь треугольника	24
§ 1.11. Смешанное произведение и его геометрический смысл. Условие компланарности векторов.	29
Глава 2. Элементы аналитической геометрии	31
§ 2.1. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве	31
§ 2.2. Плоскость, общее уравнение плоскости	32
§ 2.3. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей	34
§ 2.4. Расстояние от точки до плоскости в пространстве	35
§ 2.5. Прямая в пространстве и ее уравнения.	36
§ 2.6. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки	38
§ 2.7. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.	39
§ 2.8. Уравнение линии на плоскости	39
§ 2.9. Общее уравнение прямой на плоскости, угол между прямыми	40
§ 2.10. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, условия параллельности и перпендикулярности прямых	41

§ 2.11. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, и прямой, проходящей через две заданные точки	42
§ 2.12. Кривые второго порядка. Окружность	43
§ 2.13. Эллипс	43
§ 2.14. Гипербола	45
§ 2.15. Парабола.	47
§ 2.16. Преобразование координат на плоскости.	49
§ 2.17. Поверхности второго порядка. Сфера. Цилиндр.	51
§ 2.18. Эллипсоид.	53
§ 2.19. Конус	54
§ 2.20. Однополостный и двуполостный гиперболоиды	55
§ 2.21. Эллиптический и гиперболический параболоиды	57
§ 2.22. Понятие о многомерном евклидовом пространстве	58
Глава 3. Элементы линейной алгебры.	61
§ 3.1. Определители высших порядков	61
§ 3.2. Свойства определителей	62
§ 3.3. Матрицы и действия над ними. Обратная матрица.	63
§ 3.4. Системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Матричный метод решения.	67
§ 3.5. Формулы Крамера.	68
§ 3.6. Общая система линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса	70
§ 3.7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли	73
§ 3.8. Однородные системы.	74
Глава 4. Теория пределов	76
§ 4.1. Обозначения, переменные, интервалы	76
§ 4.2. Абсолютная величина	77
§ 4.3. Функция, способы ее задания.	78
§ 4.4. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ и его геометрический смысл.	79
§ 4.5. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ и его геометрический смысл. Односторонние пределы	82
§ 4.6. Теоремы о пределах. Ограниченные функции	83
§ 4.7. Бесконечно малые функции и их свойства	84
§ 4.8. Бесконечно большая функция, ее связь с бесконечно малой.	87
§ 4.9. Свойства пределов	88
§ 4.10. Переход к пределу в неравенствах.	89
§ 4.11. Первый замечательный предел	90
§ 4.12. Предел последовательности. Второй замечательный предел. Натуральные логарифмы	91
§ 4.13. Сравнение бесконечно малых функций.	93
§ 4.14. Непрерывность функции в точке и в интервале	94

§ 4.15. Свойства непрерывных функций	96
§ 4.16. Точки разрыва функции	97
Глава 5. Производные функции одной переменной	99
§ 5.1. Задача об определении скорости	99
§ 5.2. Определение, механический и геометрический смыслы производной	100
§ 5.3. Касательная и нормаль к кривой. Существование производной	102
§ 5.4. Дифференцируемость функции	103
§ 5.5. Производная постоянной. Правила дифференцирования	104
§ 5.6. Производные тригонометрических и логарифмической функций	106
§ 5.7. Производная сложной функции	107
§ 5.8. Производные степенной и показательной функций. Логарифмическое дифференцирование	109
§ 5.9. Неявная функция и ее производная	110
§ 5.10. Обратная функция и ее производная	110
§ 5.11. Производные обратных тригонометрических функций	112
§ 5.12. Функция, заданная параметрически, и ее дифференцирование	114
§ 5.13. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях	115
§ 5.14. Производные и дифференциалы высших порядков	117
Глава 6. Функции, непрерывные в замкнутом интервале. Правило Лопиталя	119
§ 6.1. Свойства функций, непрерывных в замкнутом интервале	119
§ 6.2. Теоремы Ферма и Ролля	121
§ 6.3. Теоремы Коши и Лагранжа	123
§ 6.4. Правило Лопиталя	125
§ 6.5. Раскрытие неопределенностей	127
Глава 7. Исследование поведения функции одной переменной	129
§ 7.1. Возрастание и убывание функции	129
§ 7.2. Точки экстремума функции. Необходимый признак экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутом интервале	130
§ 7.3. Достаточные признаки экстремума функции	133
§ 7.4. Выпуклость линии. Точки перегиба кривой	136
§ 7.5. Асимптоты кривой	138
§ 7.6. Общая схема исследования функций и построения графиков	141
Глава 8. Геометрические приложения производных	143
§ 8.1. Производная длины дуги кривой	143
§ 8.2. Кривизна кривой на плоскости	145
§ 8.3. Радиус, центр и круг кривизны кривой на плоскости	147

§ 8.4. Параметрические и векторные уравнения линии в пространстве	148
§ 8.5. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента	149
§ 8.6. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для пространственной кривой	152
§ 8.7. Первая и вторая производные векторной функции скалярного аргумента по длине дуги кривой	153
§ 8.8. Соприкасающаяся плоскость кривой	157
Глава 9. Функции многих переменных	160
§ 9.1. Функции двух переменных и способы их задания	160
§ 9.2. Геометрическое представление функции двух переменных	162
§ 9.3. Функции трех и большего числа переменных. Частное и полное приращения функции	163
§ 9.4. Предел функции	164
§ 9.5. Непрерывность, точки и линии разрыва функций	166
§ 9.6. Свойства функций, непрерывных в конечной (ограниченной) замкнутой области	167
§ 9.7. Частные производные	168
§ 9.8. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных	169
§ 9.9. Полный дифференциал	170
§ 9.10. Применение полного дифференциала функции в приближенных вычислениях	173
§ 9.11. Производная сложной функции	173
§ 9.12. Дифференцирование функций, заданных неявно	176
§ 9.13. Частные производные высших порядков	177
§ 9.14. Экстремумы. Необходимые признаки экстремума функции двух переменных	178
§ 9.15. Достаточный признак экстремума. Схема исследования на экстремум функции двух переменных	180
§ 9.16. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области	182
§ 9.17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	183
§ 9.18. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности	185
§ 9.19. Скалярное поле	186
§ 9.20. Производная по направлению	187
§ 9.21. Градиент функции и его связь с производной по направлению	189
Глава 10. Комплексные числа и функции. Элементы топологии и параметризации	191
§ 10.1. Комплексные числа и действия над ними	191
§ 10.2. Геометрическое изображение и тригонометрическая форма комплексного числа	192
§ 10.3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа	194

§ 10.4. Показательная функция комплексного аргумента	195
§ 10.5. Комплексная функция действительного аргумента и ее производная	196
§ 10.6. Элементы топологии. Простые куски	196
§ 10.7. Параметризация поверхности	198
§ 10.8. Параметрические уравнения сферы	201
Глава 11. Неопределенный интеграл	203
§ 11.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов	203
§ 11.2. Свойства неопределенного интеграла	205
§ 11.3. Замена переменной в неопределенном интеграле	207
§ 11.4. Интегрирование по частям	208
§ 11.5. Интегрирование простейших рациональных дробей	209
§ 11.6. Разложение многочлена на множители	212
§ 11.7. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби	213
§ 11.8. Интегрирование рациональных дробей	216
§ 11.9. Интегрирование простейших иррациональных функций	216
§ 11.10. Интегрирование тригонометрических функций	217
§ 11.11. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических замен	219
Глава 12. Определенный интеграл	221
§ 12.1. Площадь криволинейной трапеции	221
§ 12.2. Определение и геометрический смысл определенного интеграла	222
§ 12.3. Свойства определенного интеграла	224
§ 12.4. Производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница	229
§ 12.5. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям	231
§ 12.6. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур	233
§ 12.7. Площадь криволинейного сектора	237
§ 12.8. Вычисление длины дуги кривой	238
§ 12.9. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями	241
§ 12.10. Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений. Объем тела вращения	242
§ 12.11. Приближенное вычисление определенного интеграла методом трапеций	244
Глава 13. Несобственные и кратные интегралы	246
§ 13.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами	246
§ 13.2. Несобственные интегралы от разрывных функций	247

§ 13.3. Объем цилиндрического тела	249
§ 13.4. Двойной интеграл и его геометрический смысл	250
§ 13.5. Тройной интеграл и его физический смысл. Теорема существования кратных интегралов	251
§ 13.6. Свойства двойного (тройного) интеграла	254
§ 13.7. Вычисление двойного интеграла	255
§ 13.8. Замена переменных в двойном интеграле	259
§ 13.9. Переход к полярным координатам в двойном интеграле	260
§ 13.10. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла	262
§ 13.11. Вычисление объемов с помощью двойных интегралов	266
§ 13.12. Вычисление тройного интеграла	267
§ 13.13. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле	273
Глава 14. Криволинейные интегралы	275
§ 14.1. Криволинейные интегралы по координатам и их вычисление	275
§ 14.2. Применение криволинейных интегралов к вычислению работы	280
§ 14.3. Формула Грина. Связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом по координатам	281
§ 14.4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	283
§ 14.5. Криволинейный интеграл по длине	286
§ 14.6. Криволинейные интегралы вдоль пространственных кривых	289
§ 14.7. Применение кратных и криволинейных интегралов к вычислению координат центра тяжести тел	291
Глава 15. Обыкновенные дифференциальные уравнения	294
§ 15.1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях	294
§ 15.2. Дифференциальные уравнения первого порядка	296
§ 15.3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка	297
§ 15.4. Приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка	298
§ 15.5. Дифференциальные уравнения с разделенными и с разделяющимися переменными	299
§ 15.6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	301
§ 15.7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	303
§ 15.8. Дифференциальные уравнения высших порядков	304
§ 15.9. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка	306
§ 15.10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений	307
§ 15.11. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	310
§ 15.12. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	313

§ 15.13. Линейные неоднородные уравнения второго порядка	315
§ 15.14. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка	317
§ 15.15. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка	319
§ 15.16. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	321
§ 15.17. Об одном методе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка	324
Глава 16. Числовые ряды	327
§ 16.1. Сходимость и сумма ряда	327
§ 16.2. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости	328
§ 16.3. Признаки сравнения рядов	330
§ 16.4. Признак Даламбера	332
§ 16.5. Радиальный и интегральный признаки Коши	334
§ 16.6. Знакопередающиеся ряды	337
§ 16.7. Знакопеременные ряды	338
Глава 17. Степенные ряды	341
§ 17.1. Теорема Абеля	341
§ 17.2. Радиус сходимости степенного ряда	342
§ 17.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	344
§ 17.4. Ряды по степеням $x - x_0$	345
§ 17.5. Формула Тейлора	346
§ 17.6. Ряды Тейлора и Маклорена	347
§ 17.7. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена	349
§ 17.8. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях	352
§ 17.9. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов	353
Глава 18. Ряды Фурье	356
§ 18.1. Предварительные замечания	356
§ 18.2. Ряд Фурье. Условия Дирихле	358
§ 18.3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	362
§ 18.4. Ряды Фурье для функции с произвольным периодом	363
§ 18.5. Разложение функции, заданной в интервале, в ряд Фурье по синусам или косинусам	365
Глава 19. Уравнения математической физики	367
§ 19.1. Основные типы уравнений математической физики	367
§ 19.2. Уравнение колебаний струны	367
§ 19.3. Метод разделения переменных (метод Фурье)	371

§ 19.4. Уравнение теплопроводности. Начальные и краевые (граничные) условия. Стационарный случай. Задача Дирихле	375
§ 19.5. Задача Дирихле для круга	376
§ 19.6. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье	380
Глава 20. Интегралы по поверхности	382
§ 20.1. Определение и свойства интеграла по поверхности.	382
§ 20.2. Вычисление проекций вектора нормали к поверхности	383
§ 20.3. Вычисление интеграла по поверхности	385
§ 20.4. Применение интеграла по поверхности к решению физических задач	387
§ 20.5. Формула Остроградского	391
§ 20.6. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от линии интегрирования. . .	393
Глава 21. Элементы теории векторного поля	397
§ 21.1. Понятия векторного поля и векторной линии	397
§ 21.2. Поток вектора через поверхность	398
§ 21.3. Дивергенция векторного поля.	401
§ 21.4. Циркуляция, ротор (вихрь) векторного поля	402
§ 21.5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа	406
§ 21.6. Простейшие векторные поля.	407
Глава 22. Элементы теории вероятностей. Случайные события. . .	410
§ 22.1. Статистическое и классическое определения вероятности случайного события. Геометрическая вероятность	410
§ 22.2. Вероятность суммы несовместных событий	413
§ 22.3. Противоположные и совместные события. Вероятность произведения независимых событий.	415
§ 22.4. Вероятность суммы совместных событий. Зависимые события. Условная вероятность	417
§ 22.5. Формула полной вероятности	420
§ 22.6. Вероятность гипотез. Формула Байеса	421
§ 22.7. Повторные испытания. Формула Бернулли	422
Глава 23. Элементы теории вероятностей. Случайные величины	426
§ 23.1. Дискретная случайная величина. Закон распределения	426
§ 23.2. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. . .	428
§ 23.3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины	429
§ 23.4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал	430
§ 23.5. Нормальный закон распределения	431
§ 23.6. Числовые характеристики дискретной случайной величины. . .	433

§ 23.7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины . . .	437
§ 23.8. Неравенство Чебышёва	439
§ 23.9. Теорема Чебышёва	441
§ 23.10. Теорема Бернулли, центральная предельная теорема Ляпунова. .	443
§ 23.11. Двумерная случайная величина	444
§ 23.12. Функция распределения двумерной непрерывной случайной ве- личины.	445
§ 23.13. Плотность распределения вероятностей двумерной непрерывной случайной величины, ее связь с функцией распределения	446
§ 23.14. Законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины.	449
§ 23.15. Условные законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины	451
§ 23.16. Числовые характеристики двумерной случайной величины	452
§ 23.17. Условные математические ожидания	453
§ 23.18. Зависимость и независимость случайных величин	454
§ 23.19. Нормальный закон распределения на плоскости.	457
§ 23.20. Об аксиоматическом подходе в теории вероятностей.	458
 Глава 24. Элементы математической статистики	 460
§ 24.1. Простой статистический ряд. Статистическая функция распреде- ления. Статистический ряд. Гистограмма	460
§ 24.2. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии непре- рывной случайной величины	466
§ 24.3. Интервальная оценка математического ожидания непрерывной случайной величины.	469
§ 24.4. О сходимости по вероятности статистического среднего и стати- стической дисперсии. Состоятельные, несмещенные и эффектив- ные оценки	472
§ 24.5. Проверка статистических гипотез	473
 Приложение	 479
 Список литературы	 483

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга рассчитана на студентов втузов, обучающихся по строительным, технологическим и другим родственным специальностям и изучающих курс математики в объеме примерно 350 часов аудиторных занятий с разбиением последних поровну на лекционные и практические. В отличие от ряда учебников по математике, широко используемых во втузах, в которых математика изучается в вышеуказанном объеме (например, [1, 7, 8, 12, 13]), данная книга содержит все основные разделы математики, изучаемые студентами названных специальностей: элементы аналитической геометрии и линейной алгебры, дифференциальное и интегральное исчисления, основные сведения по уравнениям математической физики, элементы теории вероятности и математической статистики.

Изложение материала в книге ведется на достаточно высоком уровне математической строгости, за редким исключением, когда используются нестрогие методы доказательства, основанные на геометрическом истолковании рассматриваемых понятий. В то же время в рассуждениях и при проведении доказательств автор стремился избежать излишне частой замены слов математическими символами, что могло бы затруднить восприятие материала студентами. В отдельных случаях учащимся предлагается провести самостоятельно доказательства теорем и выводы формул, и даются подробные указания, как это сделать.

В книге не нашли отражение численные методы математики в связи с тем, что эти методы стали излагаться в отдельных дисциплинах «Численные методы» и «Информатика», предусмотренных учебными планами втузов.

Многолетний опыт преподавания автором курса математики во втузе показывает, что принятое в книге изложение обеспечивает доступность материала, и добросовестные студенты хорошо воспринимают такое изложение.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1.1. Действительные числа, числовая ось

Одним из основных понятий в математике является понятие числа. Оно возникло в глубокой древности в результате счета и измерений и совершенствовалось. Числа бывают рациональные и иррациональные.

Рациональным называется число, которое можно представить в виде отношения p/q двух целых чисел p и q . Известно, что рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональным называется число, которое нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Примерами иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных (вещественных)* чисел.

Числовая ось — это прямая, на которой выбраны: точка O — начальная точка отсчета, положительное направление (на рис. 1.1 оно указано стрелкой), масштаб для измерения длины. На рис. 1.1 ось проведена горизонтально, положительное направление выбрано вправо.

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. Если число x положительное, то его изображают точкой M , для которой расстояние от начала O равно $OM = x$, а направление от точки O до

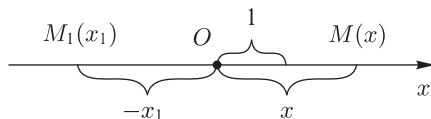


Рис. 1.1

точки M совпадает с положительным направлением оси; если число x_1 отрицательное, то его изображают точкой M_1 , для которой расстояние от начала O равно $OM_1 = -x_1$, а направление от точки O до точки M_1 противоположно положительному направлению оси. Число x называют *координатой точки M* на оси Ox , пишут $M(x)$; x_1 — координата точки M_1 , пишут $M_1(x_1)$. Иногда для координаты точки M исполь-

зуется обозначение x_M . Числовую ось обозначают Ox и называют *координатной*, или *осью координат*.

Без обоснования: между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому числу x отвечает определенная точка M числовой оси и, наоборот, каждой точке M числовой оси отвечает определенное действительное число, которое изображается этой точкой. В дальнейшем вместо «точка M с координатой x » будем говорить «точка x » и число x будем писать рядом с точкой M .

Абсолютной величиной (модулем) числа x называется число, обозначаемое $|x|$ и равное

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что абсолютная величина $|x|$ числа x — это расстояние от точки x до начала O .

§ 1.2. Декартовы координаты. Полярные координаты

Декартовы координаты. Пусть в пространстве заданы три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox , Oy и Oz с общим началом O и общим масштабом (рис. 1.2). Будем говорить, что в пространстве введена *система координат* $Oxyz$, а указанные числовые оси называть *осями координат*. Пространство обозначается R_3 . Плоскости, проходящие через оси координат, называются *координатными* и обозначаются Oxy , Oxz и Oyz . Пусть M — произвольная точка пространства, M_1 , M_2 , M_3 — проекции точки M на оси Ox , Oy и Oz , т.е. это точки пересечения соответственно с осями Ox , Oy и Oz плоскостей, проведенных через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 1.2).

Пусть x , y , z — координаты точек M_1 , M_2 , M_3 на соответствующих осях. Эти числа называются *координатами точки* M в пространстве $Oxyz$. При этом пишут $M(x, y, z)$, где x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата*. Таким образом, каждой точке пространства $Oxyz$ отвечают три числа — координаты этой точки. Ясно, что и, наоборот, каждой тройке чисел в указанном пространстве отвечает определенная точка.

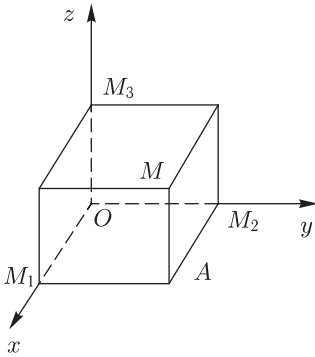


Рис. 1.2

Оси координат Ox и Oy на плоскости образуют систему координат Oxy . Пусть M_1 , M_2 — проекции точки A на оси Ox и Oy (рис. 1.2). Они являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на оси Ox и Oy соответственно. Пусть x и y — координаты точек соответственно M_1 и M_2 . Числа x и y называются *координатами точки A на плоскости*. Этот факт записывают в виде $A(x, y)$. Плоскость указанной системы координат обозначают R_2 .

Описанные выше системы координат в пространстве и на плоскости называют *прямоугольными декартовыми*. Система координат, изображенная на рис. 1.2, называется *правой*.

Полярные координаты на плоскости. Возьмем на плоскости положительную полуось Ox , т. е. ту часть оси, где $x \geq 0$. Пусть A — произвольная точка плоскости, отличная от O , и ρ — расстояние от точки A до начала O , θ — угол, образованный отрезком OA с осью Ox и отсчитываемый от оси Ox в направлении против хода часовой стрелки, причем $0 \leq \theta < 2\pi$ (рис. 1.3). Числа θ и ρ называются *полярными координатами точки A* , причем ρ — *полярный радиус*, θ — *полярный угол*, O — *полюс*, положительная полуось Ox — *полярная ось* (под положительной полуосью понимается множество всех точек числовой оси, координаты которых положительны). Если точка A совпадает с полюсом O , то для нее $\rho = 0$, а в качестве θ можно взять любое значение, удовлетворяющее условию $0 \leq \theta < 2\pi$.

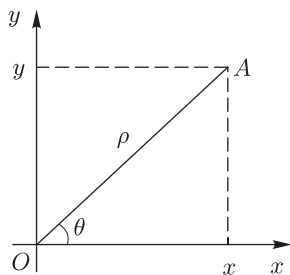


Рис. 1.3

Пусть Oxy — декартова система координат в рассматриваемой плоскости, x , y — декартовы координаты точки A . Из рис. 1.3 видно, что $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Эти формулы выражают декартовы координаты точки A через ее полярные координаты.

Угол θ , отсчитываемый от оси Ox по ходу часовой стрелки, будем считать отрицательным. В дальнейшем в некоторых случаях будем считать, что угол θ удовлетворяет условию $-\pi < \theta \leq \pi$ или $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$. Отметим также, что в качестве полярного угла можно брать угол $\theta + 2\pi k$, где k — любое целое число.

§ 1.3. Векторы, линейные операции над ними

Скалярной называется величина, которая полностью определяется своим численным значением. Примерами скалярных величин являются длина, площадь, объем, масса. *Вектором* называется направленный

отрезок прямой, соединяющий две точки в пространстве (рис. 1.4). Если A и B — начало и конец вектора, то он обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

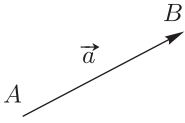


Рис. 1.4

Длиной (модулем) вектора называется число, равное длине отрезка, соединяющего начало и конец вектора. Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}| = AB$ или $|\vec{a}| = a$. Если начало вектора совпадает с концом, то вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *равными* (в этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$), если:

- равны их длины ($|a| = |b|$);
- они коллинеарны;
- они сонаправлены.

Следовательно, при параллельном переносе вектора получим вектор, равный исходному.

Сложение векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ перенесем параллельно самому себе и поместим его начало в конец вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$. Ясно, что сумму двух векторов можно получить иначе: построить $\vec{a}$, $\vec{b}$ с началом в общей точке, затем достроить на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Тогда его диагональ, выходящая из общего начала, будет суммой исходных векторов (рис. 1.5). Указанный метод легко распространяется на случаи трех

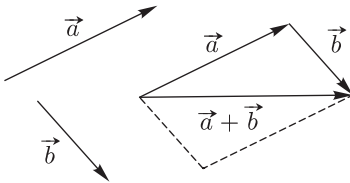


Рис. 1.5

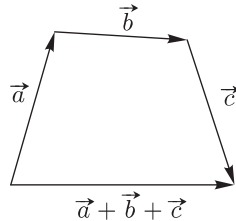


Рис. 1.6

и большего числа векторов: от конца первого строим второй, от конца второго — третий и т.д., тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего, и будет суммой рассматриваемых векторов (рис. 1.6).

Свойства сложения векторов:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}; \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}; \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}.\end{aligned}$$

Эти свойства проверяются с помощью построения.

Разность векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим эти векторы с началом в общей точке. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец — с концом вектора $\vec{a}$, называется *разностью векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$* и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ (рис. 1.7). Из рисунка видно, что $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$.

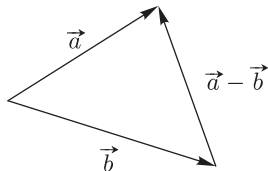


Рис. 1.7

Умножение вектора на число. Даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и число $\lambda \neq 0$. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c} = \lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$, который:

- коллинеарен $\vec{a}$;
- имеет длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- направлен так же, как и $\vec{a}$, при $\lambda > 0$, и противоположно при $\lambda < 0$.

Свойства умножения вектора на число:

- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$;
- $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$;
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{a})$.

Эти свойства доказываются построением.

Приведем еще одно соотношение. Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}^0$, который коллинеарен $\vec{a}$, направлен, как $\vec{a}$, причем $|\vec{a}^0| = 1$, называется *единичным*. Рассмотрим произведение $\vec{a}^0 |\vec{a}|$ вектора $\vec{a}^0$ на длину вектора $\vec{a}$. По определению это есть вектор, который:

- имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, так как $|\vec{a}^0| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$;
- коллинеарен вектору $\vec{a}^0$, следовательно, и вектору $\vec{a}$;
- направлен, как $\vec{a}^0$ значит, и как $\vec{a}$, поскольку множитель $|\vec{a}|$ — число положительное.

Таким образом, мы получили вектор, равный $\vec{a}$. Итак,

$$\vec{a} = \vec{a}^0 |\vec{a}|. \quad (1.1)$$

Отметим также, что вместо $(-1)\vec{a}$ пишут $-\vec{a}$.

§ 1.4. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана некоторая числовая (координатная) ось l с началом в точке O ; $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ есть вектор, произвольно расположенный в пространстве (рис. 1.8). Пусть A_1 и B_1 — проекции на ось l

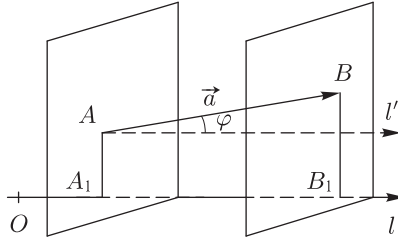


Рис. 1.8

соответственно начала A и конца B рассматриваемого вектора (т. е. A_1 и B_1 — точки пересечения с осью l плоскостей, перпендикулярных оси l и проведенных через точки A и B). Разность $x_{B_1} - x_{A_1}$ между координатами проекций конца и начала вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l называется *проекцией вектора на ось l* и обозначается $\text{пр}_l \vec{a} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$. Итак,

$$\text{пр}_l \vec{a} = x_{B_1} - x_{A_1}. \quad (1.2)$$

Под углом φ между ненулевым вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и осью l в пространстве понимается угол между этим вектором и осью l' , которая параллельна оси l , направлена, как l , и проходит через точку A — начало вектора. Этот угол всегда считается неотрицательным и измеряется в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$. Легко проверить, что

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (1.3)$$

Итак, проекция вектора на ось равна произведению его длины на косинус угла между вектором и осью. Эта формула становится очевидной, если вектор $\vec{a}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало A лежало на оси l , например, совпало с точкой A_1 .

§ 1.5. Разложение вектора по базисным векторам

Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Здесь и в дальнейшем будем считать, что эта система правая, т. е. такая, для которой поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π , совершается в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть на плоскость Oxy из какой-либо точки положительной

полуоси Oz . Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, лежащие на осях Ox, Oy, Oz соответственно и направленные как эти оси, а их начала совпадают с началом координат O (рис. 1.9). Эти векторы называются *базисными (основными)*.

Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор в системе координат $Oxyz$. Перенесем его параллельно самому себе так, чтобы начало вектора совпало с точкой O . Получим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Пусть M_1, M_2 и M_3 — проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Из рис. 1.9 видно, что

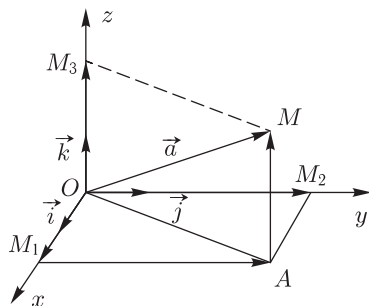


Рис. 1.9

$$\begin{aligned} \vec{a} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \quad (1.4) \end{aligned}$$

Пусть a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Так как a_x — проекция $\vec{a}$ на ось Ox , то по формуле (1.2) имеем $a_x = x_{M_1} - x_O$; так как $x_O = 0$, то

$$a_x = x_{M_1}. \quad (1.5)$$

Пусть $a_x = x_{M_1} > 0$, как показано на рис. 1.9. В этом случае $x_{M_1} = OM_1 = |\overrightarrow{OM_1}|$. По формуле (1.1) имеем $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \vec{i}$, но $|\overrightarrow{OM_1}| = x_{M_1} = a_x$, поэтому $\overrightarrow{OM_1} = a_x \vec{i}$. Легко проверить, что эта формула остается справедливой при $a_x = x_{M_1} < 0$ (при этом вектор $\overrightarrow{OM_1}$ будет направлен противоположно $\vec{i}$). Аналогично будем иметь $\overrightarrow{OM_2} = a_y \vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = a_z \vec{k}$. Подставим эти выражения в (1.4):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.6)$$

Получили формулу, которая называется *разложением вектора по базисным векторам*. Коротко ее записывают в виде $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, подчеркивая, что задание вектора в пространстве равносильно заданию трех чисел — проекций этого вектора на оси координат. Числа a_x, a_y, a_z называют также *координатами* $\vec{a}$ по отношению к базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Слагаемые векторы правой части (1.6) называют *составляющими* вектора $\vec{a}$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ с началом в точке O — начале координат — называется *радиус-вектором* точки M , конца этого вектора. Пока-

жем, что проекции радиус-вектора точки M на оси координат равны координатам этой точки.

Пусть точка M имеет координаты (x, y, z) в рассматриваемой системе $Oxyz$. По определению абсциссы точки M имеем $x = x_{M_1}$, где x_{M_1} — координата точки M_1 . Но согласно (1.5) проекция a_x вектора $\vec{a}$ на ось Ox равна x_{M_1} , т. е. $x = a_x$. Аналогично $y = a_y$, $z = a_z$. Итак, $\vec{OM} = (x, y, z)$.

§ 1.6. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Разложим векторы по формуле (1.6): $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Эти соотношения почленно сложим и учтем, что по свойству умножения вектора на число $a_x \vec{i} + b_x \vec{i} = (a_x + b_x) \vec{i}$ и т. п. Получим $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$, или

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad (1.7)$$

Аналогично для разности

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \quad (1.8)$$

Точно так же для произведения λ и $\vec{a}$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \quad (1.9)$$

Формула (1.7) показывает, что проекция суммы векторов на ось координат равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось. Подобное утверждение имеет место и для формулы (1.8). Формула (1.9) показывает, что при умножении вектора на число λ умножаются на это же число все проекции вектора.

§ 1.7. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Пусть вектор $\vec{a}$ задан своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Перенесем его параллельно себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Получим $\vec{a} = \vec{OM}$. Из рис. 1.9 видно, что

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{OM}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{AM}|^2 = |\vec{OM}_1|^2 + |\vec{OM}_2|^2 + |\vec{OM}_3|^2.$$

Согласно (1.5) $|\vec{OM}_1|^2 = x_{M_1}^2 = a_x^2$, аналогично $|\vec{OM}_2|^2 = a_y^2$ и $|\vec{OM}_3|^2 = a_z^2$. Эти числа подставим в предыдущую формулу и получим

$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Извлечем квадратный корень и найдем длину вектора:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.10)$$

Задача. Пусть в пространстве $Oxyz$ точки A и B заданы координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.10). Нужно найти расстояние между ними.

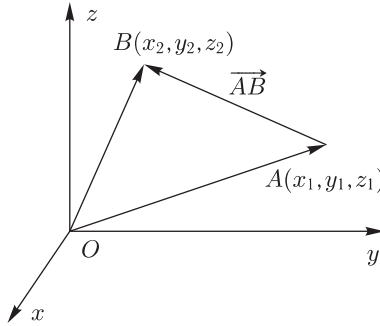


Рис. 1.10

Так как координаты точки A равны проекциям на оси координат радиус-вектора этой точки, то $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Согласно (1.8) $\vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, но $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$. Значит, $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Отсюда видно, что проекции вектора на оси координат равны разностям соответствующих координат его конца и начала. Зная проекции $\vec{AB}$, по формуле (1.10) найдем длину вектора $\vec{AB}$, следовательно, и расстояние между точками A и B :

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§ 1.8. Направляющие косинусы вектора

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан ненулевой вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Поместим его начало в начало координат. Пусть α, β, γ — углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 1.11). По формуле (1.3) для проекций этого вектора на оси координат имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (1.11)$$

В правые части вместо $|\vec{a}|$ подставим выражение (1.10) и найдем косинусы углов:

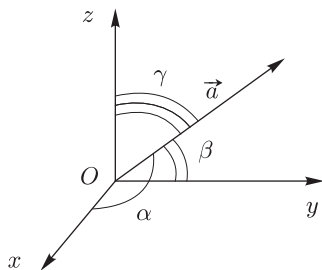


Рис. 1.11

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; & \cos \beta &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Они называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$. Если все равенства в (1.12) возвести в квадрат и почленно сложить, то получим $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Для единичного вектора, у которого $|\vec{a}^0| = 1$, формулы (1.11) примут вид $a_x = \cos \alpha$, $a_y = \cos \beta$, $a_z = \cos \gamma$. Отсюда $\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

§ 1.9. Скалярное произведение, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов

Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых расположены в одной точке, а угол между векторами равен φ . Такое расположение мы всегда можем получить, перенеся один из векторов параллельно.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ (либо $\vec{a} \cdot \vec{b}$) и определяется как число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1.13)$$

Из определения проекции ясно, что $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ (проекция $\vec{b}$ на $\vec{a}$, точнее на ось, направленную как $\vec{a}$, на которой лежит $\vec{a}$). С учетом этого соотношения формулу (1.13) запишем так:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (1.14)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора и проекции другого вектора на направление первого.

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать также $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$, где λ — скалярный множитель;
- $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

Первое свойство показывает, что сомножители можно поменять местами; второе — что постоянный скалярный множитель можно вынести за знак скалярного произведения; третье — что при скалярном умножении векторов можно использовать правило умножения многочленов. Первые два свойства проверяются на основании определения скалярного произведения векторов, т.е. с помощью формулы (1.13). Докажем третье свойство.

С учетом (1.14) запишем

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Пусть векторы заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, поэтому $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Сначала для произведений базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ докажем справедливость соотношений

$$(\vec{i}, \vec{i}) = 1; \quad (\vec{j}, \vec{j}) = 1; \quad (\vec{k}, \vec{k}) = 1; \quad (1.15)$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) = 0; \quad (\vec{j}, \vec{k}) = 0; \quad (\vec{i}, \vec{k}) = 0. \quad (1.16)$$

Действительно, по формуле (1.13) имеем $(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos(\widehat{(\vec{i}, \vec{i})})$, поэтому $(\vec{i}, \vec{i}) = 1$. Далее, $(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos(\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}) = 0$. Остальные равенства в (1.15) и (1.16) доказываются аналогично.

Запишем скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Используя второе и третье свойства скалярного произведения, будем иметь

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= a_x b_x (\vec{i}, \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i}, \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i}, \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j}, \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j}, \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j}, \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k}, \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k}, \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k}, \vec{k}). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.15) и (1.16) получим

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.17)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций этих векторов.

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции с использованием формулы (1.10). Из (1.13) следует, что $\cos \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) / (|\vec{a}| |\vec{b}|)$. Следовательно, согласно (1.17)

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.18)$$

Зная $\cos \varphi$, найдем угол φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов.

Если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, то вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$.

В самом деле, пусть $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, тогда согласно (1.13) имеем $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Значит, $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \pi/2$, т. е. векторы ортогональны.

Условие ортогональности двух векторов с учетом (1.17) можно записать следующим образом: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

§ 1.10. Определители второго и третьего порядков.

Векторное произведение, условие коллинеарности двух векторов, площадь треугольника

Определители второго и третьего порядков. Пусть даны четыре числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} . *Определителем второго порядка* называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где левая часть формулы — обозначение определителя.

Пусть даны девять чисел a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{31} , a_{32} , a_{33} . *Определителем третьего порядка* называется число, определяемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Левая часть формулы — обозначение определителя третьего порядка. Числа a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{31} , a_{32} , a_{33} называются *элементами определителя*. Будем обозначать их a_{ij} , где i — номер строки, j — номер столбца, которым принадлежит элемент.

Минором, соответствующим элементу a_{ij} определителя третьего порядка, называется число M_{ij} , равное определителю второго порядка, получаемому вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называют число, определяемое формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Это число равно M_{ij} , если $i + j$ четно, и равно $-M_{ij}$, если $i + j$ нечетно. Из этого определения следует, например, что:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формула определителя третьего порядка примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

Можно сделать вывод, что определитель третьего порядка есть сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Легко проверить, что сказанное справедливо для элементов любой строки (любого столбца) определителя, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}.$$

Векторное произведение. Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим их, поместив начала в общей точке и обозначив φ угол между ними (рис. 1.12). Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), который обладает свойствами:

— $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, т. е. длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах;

— $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;

— вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Для векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ применяют и другие обозначения: $[\vec{a} \times \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}]$.

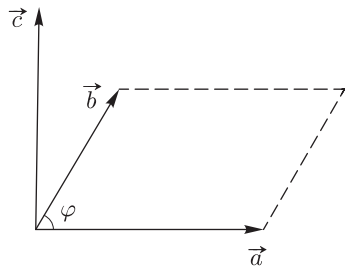


Рис. 1.12

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b} \times \vec{a}]$;
- $[\lambda \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \times \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$;
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Первые два свойства доказываются построением. Докажем справедливость последнего равенства. Вначале отметим, что любой вектор $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1$, где вектор $\vec{b}_0$ коллинеарен $\vec{a}$, а вектор $\vec{b}_1$ ортогонален $\vec{a}$ (рис. 1.13; частные случаи, когда один из векторов $\vec{b}_0$, $\vec{b}_1$ является нулевым, здесь не рассматриваются). Чтобы в этом убедиться, достаточно через начало вектора $\vec{b}$ провести прямую, параллельную $\vec{a}$, через конец вектора $\vec{b}$ провести плоскость, перпендикулярную $\vec{a}$, точка их пересечения служит концом $\vec{b}_0$ и началом $\vec{b}_1$ (начало $\vec{b}_0$ совпадает с началом $\vec{b}$, конец $\vec{b}_1$ — с концом $\vec{b}$).

Рис. 1.13

Замечая, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1$, равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}_1$, поскольку они имеют общую сторону a , одну и ту же высоту b_1 , заключаем, что

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_0 + \vec{b}_1) = \vec{a} \times \vec{b}_1.$$

Аналогично для вектора $\vec{c} = \vec{c}_0 + \vec{c}_1$, где вектор $\vec{c}_0$ коллинеарен $\vec{a}$, а вектор $\vec{c}_1$ ортогонален $\vec{a}$, будем иметь

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{c}_0 + \vec{c}_1) = \vec{a} \times \vec{c}_1.$$

Покажем, что

$$\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{c}_1, \quad \text{или} \quad \vec{d} = \vec{d}_b + \vec{d}_c,$$

где $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1)$, $\vec{d}_b = \vec{a} \times \vec{b}_1$, $\vec{d}_c = \vec{a} \times \vec{c}_1$ суть векторы, лежащие в одной плоскости, так как они перпендикулярны $\vec{a}$. Здесь имеем

$$|\vec{d}_b| = |\vec{a}| |\vec{b}_1|, \quad |\vec{d}_c| = |\vec{a}| |\vec{c}_1|,$$

поскольку вектор $\vec{a}$ ортогонален и $\vec{b}_1$, и $\vec{c}_1$. Кроме того, $|\vec{d}| = |\vec{a}| |\vec{b}_1 + \vec{c}_1|$.

Заметим, что $(\widehat{\vec{d}_b}, \widehat{\vec{d}_c}) = (\widehat{\vec{b}_1}, \widehat{\vec{c}_1})$, так как вектор $\vec{d}_b$ ортогонален $\vec{b}_1$, а вектор $\vec{d}_c$ ортогонален $\vec{c}_1$. Но $\vec{d}$ ортогонален $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$, поэтому угол

$(\vec{d}_b, \vec{d})$ равен углу между векторами $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$ (рис. 1.14). Таким образом, векторы $\vec{d}$, $\vec{d}_b$, $\vec{d}_c$ получаются поворотом вокруг $\vec{a}$ соответственно векторов $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ на угол $\pi/2$ в одном и том же направлении (против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{a}$) и умножением их на $|\vec{a}|$. Это означает, что $\vec{d} = \vec{d}_b + \vec{d}_c$. Учитывая, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b}_0 + \vec{c}_0 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1$, где $\vec{b}_0 + \vec{c}_0$ — вектор, коллинеарный $\vec{a}$, а вектор $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$ ортогонален $\vec{a}$, и приняв во внимание предыдущие соотношения, имеем

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \\ &= \vec{a} \times (\vec{b}_0 + \vec{c}_0 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1) = \vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) = \\ &= \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{c}_1 = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},\end{aligned}$$

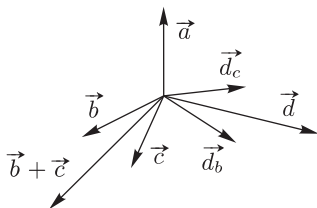


Рис. 1.14

что и требовалось.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Сначала рассмотрим векторные произведения базисных векторов.

С помощью определения векторного произведения покажем справедливость равенств

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j};\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}; \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.\tag{1.20}$$

Пусть $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ обладает свойствами:

- $|\vec{c}| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
- $\vec{c} \perp \vec{i}$, $\vec{c} \perp \vec{j}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$;
- $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ совершается против хода часовой стрелки, т. е. $\vec{c}$ совпадает с $\vec{k}$.

Следовательно, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Покажем, что $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$. Пусть $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{c}$, тогда $|\vec{c}| = |\vec{i}| |\vec{i}| \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) = 0$, $\vec{c} = \vec{0}$, т. е. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$.

Аналогично доказываются остальные равенства (1.19) и (1.20).

Рассмотрим векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Использував последние два свойства векторного произведения, запишем

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= a_x b_x [\vec{i} \times \vec{i}] + a_x b_y [\vec{i} \times \vec{j}] + a_x b_z [\vec{i} \times \vec{k}] + \\ &+ a_y b_x [\vec{j} \times \vec{i}] + a_y b_y [\vec{j} \times \vec{j}] + a_y b_z [\vec{j} \times \vec{k}] + \\ &+ a_z b_x [\vec{k} \times \vec{i}] + a_z b_y [\vec{k} \times \vec{j}] + a_z b_z [\vec{k} \times \vec{k}].\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.19) и (1.20) имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i}.$$

Итак,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (1.21)$$

Следовательно (§ 1.1),

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

Эту формулу можно записать так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Здесь считается, что правые части формул (1.22), (1.23) равны, тем самым вводится понятие определителя третьего порядка, в котором элементы первой строки суть векторы.

Таким образом, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями, то векторное произведение двух векторов определяется по формуле (1.23).

Условие коллинеарности двух векторов. Если для ненулевых векторов выполняется условие $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В самом деле, если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$ и $\sin \varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны.

В этом случае из (1.21) имеем $a_y b_z - a_z b_y = 0$, $a_x b_z - a_z b_x = 0$, $a_x b_y - a_y b_x = 0$. Значит, $a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$. Это и есть *условие коллинеарности двух векторов*, заданных своими проекциями.

Задача. Определить площадь треугольника, заданного своими вершинами.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ — вершины треугольника в пространстве $Oxyz$, а их координаты — заданные числа. Найдем векторы (§ 1.7)

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

векторное произведение которых обозначим $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Тогда согласно (1.22)

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad d_y = - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

и $|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, равна найденному числу $|\vec{d}|$, поэтому искомая площадь треугольника определяется по формуле $S_{\Delta} = |\vec{d}|/2$.

§ 1.11. Смешанное произведение и его геометрический смысл. Условие компланарности векторов

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Определим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Этот вектор умножим скалярно на $\vec{c}$ и получим число $(\vec{d}, \vec{c})$, которое называется *смешанным (векторно-скалярным) произведением трех исходных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$* и обозначается

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c}). \quad (1.24)$$

Рассмотрим это смешанное произведение, когда векторы заданы своими проекциями:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Проекции вектора $\vec{d}$ на оси координат определяются по формуле (1.22).

Скалярное произведение векторов $\vec{d}$ и $\vec{c}$ равно сумме произведений одноименных проекций:

$$(\vec{d}, \vec{c}) = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Левая часть этой формулы — смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, а правую часть запишем в виде определителя третьего порядка:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

Эта формула позволяет вычислить смешанное произведение векторов, заданных своими проекциями.

Геометрический смысл смешанного произведения. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построим эти векторы, поместив их начала в общей точке, а затем на них, как на ребрах, построим параллелепипед (рис. 1.15). Построим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. перпендикулярный к нижнему основанию параллелепипеда. Длина $|\vec{d}|$ равна площади S

нижнего основания параллелепипеда (т.е. площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах). Через конец $\vec{c}$

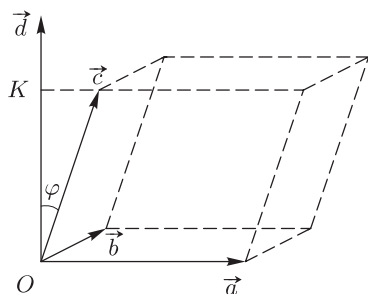


Рис. 1.15

проведем плоскость, перпендикулярную $\vec{d}$ (ясно, что верхнее основание параллелепипеда лежит в этой плоскости). Эта плоскость пересечет вектор $\vec{d}$ (или его продолжение) в точке K (K — проекция конца вектора $\vec{c}$ на указанную линию). Из построения следует, что расстояние OK равно высоте h параллелепипеда. Пусть φ — угол между $\vec{d}$ и $\vec{c}$. На рис. 1.15 изображен случай, когда $\varphi < \pi/2$, при этом $OK = h = |\vec{c}| \cos \varphi$. Смешанное

произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \varphi$. Но $|\vec{d}| = S$ и $h = |\vec{c}| \cos \varphi$. Поэтому $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Sh = V$, где V — объем параллелепипеда. Этот результат мы получили для случая $\varphi < \pi/2$. Если $\varphi > \pi/2$, то вектор $\vec{c}$ лежит ниже плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, при этом $OK = h = -|\vec{c}| \cos \varphi$ и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -Sh = -V$. Итак, справедлива формула

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V, \quad (1.26)$$

где V — объем параллелепипеда. При $\varphi = \pi/2$ обе части формулы (1.26) равны нулю.

Определение. Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости.

Условие компланарности трех векторов. Если для трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется условие

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad (1.27)$$

то эти векторы компланарны.

Действительно, в этом случае согласно (1.26) имеем $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V = \pm Sh = 0$. Отсюда следует, что три вектора лежат в одной плоскости, так как $S = 0$ или $h = 0$.

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими проекциями, то условие компланарности (1.27) с учетом (1.25) можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие проверяется непосредственно по заданным проекциям рассматриваемых векторов.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 2.1. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

В аналитической геометрии любую поверхность в пространстве рассматривают как геометрическое место точек, обладающих определенным свойством. Расположим такую поверхность в системе координат $Oxyz$. Свойство, общее для всех точек поверхности, запишем аналитически, т. е. в виде соотношения, связывающего координаты x, y, z произвольной точки M поверхности:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2.1)$$

где левая часть $F(x, y, z)$ — известное выражение, содержащее x, y, z . Формула (2.1) называется *уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$* , а величины x, y, z — *текущими координатами*. Например, сфера радиуса R с центром $(0, 0, 0)$ (рис. 2.1) определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (2.2)$$

В самом деле, для любой точки $M(x, y, z)$ сферы расстояние $OM = R$. Заметив, что $OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$, подставим это выражение в предыдущую формулу, возведем в квадрат и перенесем R^2 влево, при этом получим (2.2). Поэтому (2.2) является уравнением сферы.

По определению геометрического места точек уравнению (2.1) удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности. Можно сформулировать и обратное утверждение: каждому уравнению вида (2.1) в пространстве $Oxyz$ отвечает некоторая поверхность — геометрическое

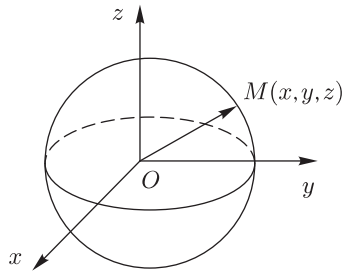


Рис. 2.1

место точек, координаты которых удовлетворяют (2.1), если не имеет место случай, когда это уравнение не определяет никакого множества точек, например, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, или когда уравнение определяет одну точку, например, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, либо линию, например, $x^2 + y^2 = 0$.

Итак, каждой поверхности в пространстве $Oxyz$ отвечает уравнение вида (2.1). Это обстоятельство позволяет свести изучение геометрических свойств поверхностей к изучению их уравнений аналитическими методами. Этим и занимается аналитическая геометрия в пространстве.

Уравнения линии в пространстве. Линию L в пространстве $Oxyz$ будем рассматривать как линию пересечения двух поверхностей. Пусть каждая из этих поверхностей определяется одним из уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Тогда координаты x, y, z любой точки M линии L удовлетворяют каждому из этих уравнений, так как эта точка лежит на обеих поверхностях. Таким образом, линии L отвечает система двух уравнений (2.3). Эта система называется *уравнениями линии L в пространстве*.

Итак, линии L в пространстве отвечает система уравнений (2.3), и, наоборот, каждой системе уравнений (2.3) в пространстве $Oxyz$ отвечает некоторая линия — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этой системе.

§ 2.2. Плоскость, общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана плоскость, т. е. заданы:

- координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 , лежащей на плоскости;
- проекции A, B, C на оси координат ненулевого вектора $\vec{N} = (A, B, C)$, перпендикулярного этой плоскости, который называется *нормальным вектором плоскости*.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости. Рассмотрим вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ (рис. 2.2). Он лежит на рассматриваемой плоскости и поэтому перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}$ этой плоскости, следовательно, скалярное произведение этих векторов $(\vec{M_0M}, \vec{N}) = 0$.

Выразим скалярное произведение через проекции векторов. Получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.4)$$

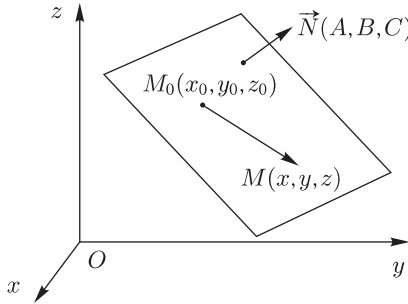


Рис. 2.2

Это есть уравнение рассматриваемой плоскости. Здесь x, y, z — текущие координаты, т. е. координаты произвольной точки плоскости.

Общее уравнение плоскости. Возьмем уравнение первой степени относительно x, y, z :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.5)$$

где A, B, C, D — заданные числа, причем A, B, C не равны нулю одновременно (иначе (2.5) примет вид $D = 0$ и уже не будет уравнением).

Пусть $C \neq 0$, тогда (2.5) можно записать в виде

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - (-D/C)) = 0. \quad (2.6)$$

Но это есть уравнение вида (2.4), поэтому оно (следовательно, и уравнение (2.5)) определяет в пространстве $Oxyz$ плоскость, проходящую через точку $M_0(0, 0, -D/C)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B, C)$.

Случай $C = 0$ (при этом $A \neq 0$ или $B \neq 0$) рассматривается аналогично.

Итак, уравнением (2.5) в пространстве всегда определяется плоскость с нормальным вектором

$$\vec{N} = (A, B, C).$$

Оно называется *общим уравнением плоскости*. Мы показали также, что в (2.5) числа A, B, C (коэффициенты уравнения при текущих координатах) представляют собой проекции на оси координат нормального вектора $\vec{N}$ этой плоскости. Отметим отдельные частные случаи уравнения (2.5).

Пусть в (2.5) $D = 0$, тогда уравнение примет вид $Ax + By + Cz = 0$, плоскость в этом случае проходит через точку $O(0, 0, 0)$, так как координаты точки O удовлетворяют этому уравнению.

Пусть $D \neq 0$, $C = 0$, тогда получим уравнение $Ax + By + D = 0$. В этом случае плоскость параллельна оси Oz , так как ее нормальный вектор $\vec{N} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz . В самом деле, здесь проекция вектора $\vec{N}$ на ось Oz равна $N \cos(\overrightarrow{Oz}, \vec{N}) = 0$. Следовательно, $\cos(\overrightarrow{Oz}, \vec{N}) = 0$, значит, угол $(\overrightarrow{Oz}, \vec{N}) = \pi/2$.

Остальные частные случаи уравнения (2.5) читатель может рассмотреть самостоятельно.

§ 2.3. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть в пространстве $Oxyz$ две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (2.8)$$

где коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ — заданные числа. Тогда векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы этих плоскостей (рис. 2.3). За угол φ между плоскостями (2.7)

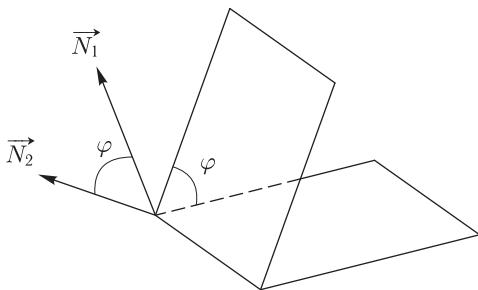


Рис. 2.3

и (2.8) примем один из образованных ими двугранных углов, равный углу между их нормальными векторами. Используя формулу (1.18) определим

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.9)$$

Вычислив по формуле (2.9) $\cos \varphi$, найдем угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Если $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, то плоскости (2.7), (2.8) параллельны, так как коллинеарны их нормальные векторы.

Если $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$, то плоскости (2.7), (2.8) перпендикулярны, так как перпендикулярны их нормальные векторы.

§ 2.4. Расстояние от точки до плоскости в пространстве

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.10)$$

где A, B, C, D — известные числа. Дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, ее координаты x_1, y_1, z_1 — заданные числа. Нужно найти d — расстояние от точки M_1 до плоскости с уравнением (2.10). Нормальный вектор этой плоскости равен $\vec{N} = (A, B, C)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — проекция точки M_1 на плоскость, т.е. основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на заданную плоскость (рис. 2.4). Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равна искомому рас-

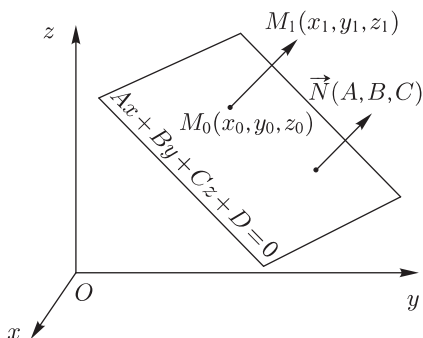


Рис. 2.4

стоянию d . Ясно также, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен $\vec{N}$. Проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на оси координат равны разностям координат конца и начала: $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Скалярное произведение этого вектора и вектора $\vec{N}$ определим по формуле (1.17):

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0). \quad (2.11)$$

С другой стороны, скалярное произведение в левой части (2.11) равно

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}) = |\overrightarrow{M_0M_1}| |\vec{N}| \cos(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}}) = d|\vec{N}|(\pm 1), \quad (2.12)$$

где $+1$ берется, когда угол $(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}}) = 0$ (в этом случае точка M_1 и вектор $\vec{N}$ лежат по одну сторону от плоскости), и -1 , когда этот угол равен π (в этом случае точка M_1 и вектор $\vec{N}$ лежат по разные

стороны от плоскости). Подставим выражение (2.12) в левую часть формулы (2.11), а в правой части раскроем скобки. Получим

$$\pm d|\vec{N}| = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0. \quad (2.13)$$

Точка M_0 лежит на плоскости с уравнением (2.10), поэтому ее координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют (2.10), т.е. имеет место соотношение $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, и $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Теперь формулу (2.13) можно записать так: $\pm d|\vec{N}| = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Найдем теперь d , учитывая, что $|\vec{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$\pm d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.14)$$

Из формулы (2.14) видно, что для нахождения расстояния d от точки M_1 до плоскости с уравнением (2.10) нужно в левую часть уравнения (2.10) вместо x, y, z поставить координаты x_1, y_1, z_1 заданной точки M_1 , а затем найденное число поделить на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Полученное число будет равно d , если оно положительное, и $-d$, если это число отрицательное. Тем самым найдем искомое расстояние d .

§ 2.5. Прямая в пространстве и ее уравнения

Общие уравнения прямой в пространстве. Пусть в пространстве $Oxyz$ две плоскости заданы уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ — известные числа. Пусть эти плоскости не параллельны (не выполняется условие параллельности плоскостей), тогда они пересекаются по прямой. Уравнения в системе (2.15) являются уравнениями этой прямой. Их называют *общими уравнениями прямой в пространстве*. Попутно отметим, что координаты точки пересечения рассматриваемой прямой и плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ можно найти, решив совместно общие уравнения прямой с уравнением плоскости. Здесь мы учитываем, что координаты этой точки пересечения удовлетворяют уравнениям прямой и плоскости.

Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Пусть в системе $Oxyz$ прямая определена следующим образом:

- заданы координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 , лежащей на прямой;
- заданы проекции m, n, p ненулевого вектора $\vec{a}$, параллельного прямой ($\vec{a}$ называется *направляющим вектором прямой*).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка рассматриваемой прямой и $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ — радиус-векторы точек M_0 , M . Из рис. 2.5 видно, что

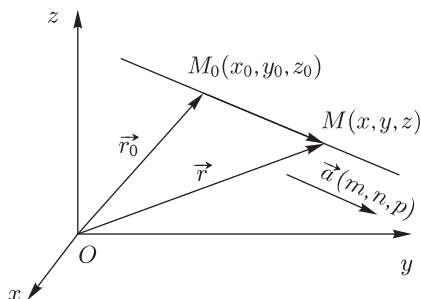


Рис. 2.5

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}. \quad (2.16)$$

Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен $\vec{a}$, то ясно, что $\overrightarrow{M_0M}$ можно получить умножением $\vec{a}$ на некоторый скалярный множитель t . Тогда

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}. \quad (2.17)$$

Отсюда $|\overrightarrow{M_0M}| = |t| |\vec{a}|$, причем вектор $\overrightarrow{M_0M}$ направлен, как $\vec{a}$, при $t > 0$, и в противоположную сторону при $t < 0$. Запишем (2.16) с учетом (2.17) в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \quad (2.18)$$

Это соотношение называется *векторным уравнением рассматриваемой прямой*, а скалярная величина t — *параметром*. Каждому значению t согласно (2.18) отвечает вектор $\vec{r}$, конец M которого лежит на прямой. При изменении t этот вектор изменяется, а его конец — точка M — движется по прямой. Мы учли, что $\vec{r}_0$, $\vec{a}$ — заданные постоянные векторы, причем проекции вектора $\vec{r}_0$ на оси координат равны координатам точки M_0 , так как $\vec{r}_0$ есть радиус-вектор этой точки, т.е. $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Поскольку $\vec{r}$ есть радиус-вектор точки M , его проекции равны координатам точки M , т.е. $\vec{r} = (x, y, z)$. Как известно, при умножении вектора на число все проекции вектора на оси координат также умножаются на это число, поэтому $t\vec{a} = (tm, tn, tp)$. При сложении векторов их проекции складываются, поэтому $\vec{r}_0 + t\vec{a} = (x_0 + tm, y_0 + tn, z_0 + tp)$, но согласно (2.18) этот вектор равен $\vec{r}$, следовательно, равны соответствующие проекции:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \quad (2.19)$$

Эти соотношения называют *параметрическими уравнениями прямой*. Каждому значению параметра t на прямой отвечает определенная точка M , координаты x, y, z которой вычисляются по формуле (2.19). При изменении t точка M с указанными координатами движется по прямой, а ее координаты изменяются согласно (2.19).

§ 2.6. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Из каждого уравнения в (2.19) выразим t , полученные выражения приравняем и тогда будем иметь

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2.20)$$

Эти соотношения называют *каноническими уравнениями прямой*; здесь x_0, y_0, z_0 — заданные координаты точки M_0 прямой; x, y, z — текущие координаты, т.е. координаты произвольной точки M прямой; m, n, p — заданные числа, равные проекциям направляющего вектора $\vec{a}$ прямой на оси координат. Из (2.20) можно получить уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2.21)$$

Ясно, что каждое из них, как уравнение первой степени относительно текущих координат в пространстве $Oxyz$, определяет плоскость. Пересекаясь, эти плоскости определяют рассматриваемую прямую.

Соотношение (2.20) используется и в случае равенства нулю одного или двух из чисел m, n, p . Пусть, например, $m = 0$ и $n = 0$, тогда имеем $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$. В этом случае числители дробей, знаменатели которых равны нулю, мы также будем считать равными нулю, т.е. $x - x_0 = 0, y - y_0 = 0$. Эти два уравнения определяют рассматриваемую прямую, причем каждое из них определяет плоскость, а прямая является линией их пересечения.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой. Координаты этих точек — заданные числа. Нужно записать уравнения прямой, проходящей через эти две точки.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ лежит на рассматриваемой прямой, поэтому его можно взять в качестве ее направляющего вектора. В качестве начальной точки прямой можно взять любую из указанных точек, например, M_1 . Тогда уравнения (2.20) запишутся так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

§ 2.7. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности

Пусть в пространстве $Oxyz$ две прямые заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \quad (2.23)$$

Здесь x, y, z — текущие координаты, остальные величины — заданные числа; x_1, y_1, z_1 — координаты точки M_1 на прямой (2.22); m_1, n_1, p_1 — проекции на оси координат направляющего вектора $\vec{a}_1$ этой прямой; x_2, y_2, z_2 — координаты точки M_2 на прямой (2.23); m_2, n_2, p_2 — проекции на оси координат направляющего вектора $\vec{a}_2$ этой прямой.

За угол φ между этими прямыми примем угол между их направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Согласно формуле (1.18) имеем

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

По $\cos \varphi$ найдем угол φ , измеряемый от 0 до π .

Если $m_1/m_2 = n_1/n_2 = p_1/p_2$, то прямые (2.22), (2.23) параллельны, так как коллинеарны их направляющие векторы. Если $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$, то прямые (2.22), (2.23) перпендикулярны, так как перпендикулярны их направляющие векторы.

§ 2.8. Уравнение линии на плоскости

Поступив так же, как в случае уравнения поверхности в пространстве, можно показать, что каждой линии на плоскости Oxy отвечает соотношение вида

$$F(x, y) = 0, \quad (2.24)$$

которому удовлетворяют координаты x, y любой точки линии. Здесь F — известное выражение, содержащее x и y . Соотношение (2.24) называют *уравнением линии на плоскости Oxy* , где x, y — текущие координаты. И, наоборот, уравнению вида (2.24) на плоскости Oxy отвечает некоторая линия — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют (2.24), за исключением так называемых вырожденных случаев, когда уравнение ничего не определяет либо

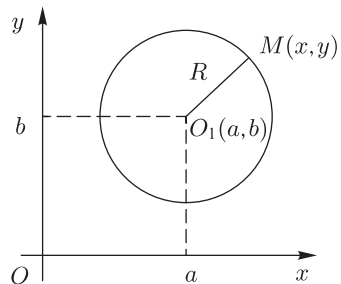


Рис. 2.6

определяет лишь точку. Например, окружности радиуса R с центром $O_1(a, b)$ (рис. 2.6) отвечает уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0. \quad (2.25)$$

В самом деле, для любой точки $M(x, y)$ окружности расстояние $O_1M = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$. Возведя в квадрат это выражение, получим (2.25). Если O_1 совпадает с началом координат, то $a = 0$ и $b = 0$, а (2.25) примет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Однако, например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ отвечает лишь точка $O(0, 0)$, а уравнению $x^2 + y^2 = -1$ ничего не соответствует.

§ 2.9. Общее уравнение прямой на плоскости, угол между прямыми

Мы знаем, что уравнение первой степени

$$Ax + By + D = 0 \quad (2.26)$$

в пространстве $Oxyz$ определяет плоскость, параллельную оси Oz , причем ее нормальный вектор $\vec{N} = (A, B, 0)$. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью Oxy по прямой PQ (рис. 2.7) и $M(x, y, 0)$ — произвольная точка этой прямой. Так как точка M лежит на плоскости с уравнением (2.26), то ее координаты в пространстве удовлетворяют этому уравнению. Таким образом, координаты x, y произвольной точки M прямой PQ удовлетворяют (2.26). Следовательно, это и есть уравнение указанной прямой PQ на плоскости.

Итак, уравнение (2.26) в пространстве $Oxyz$ определяет плоскость, параллельную оси Oz . Это же уравнение на плоскости Oxy определяет прямую, являющуюся линией пересечения указанной плоскости с плоскостью Oxy . Уравнение (2.26) называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

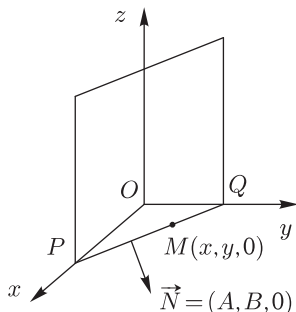


Рис. 2.7

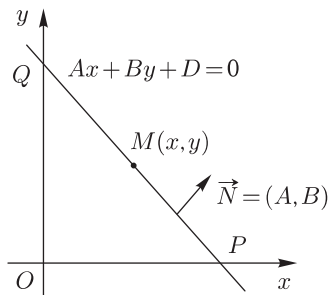


Рис. 2.8

В дальнейшем у точки M и у нормального вектора $\vec{N}$ этой прямой третьи (нулевые) координаты записывать не будем. Прямую будем изображать в плоскости Oxy (рис. 2.8).

Из изложенного видно, что в общем уравнении прямой коэффициенты A и B при текущих координатах x, y являются проекциями нормального вектора $\vec{N}$ прямой на оси координат. По аналогии с общим уравнением плоскости можно рассмотреть частные случаи общего уравнения прямой, когда те или иные коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль.

Пусть на плоскости Oxy две прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \quad (2.27)$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0, \quad (2.28)$$

при этом $A_1, B_1, D_1, A_2, B_2, D_2$ — заданные числа; $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ — нормальные векторы этих прямых. За угол φ между ними примем угол между нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ этих прямых. Но последний определяется через косинус угла φ , который найдем по формуле (1.18):

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

В этой формуле, как и для выведенной ранее для косинуса угла между векторами в пространстве, угол φ считается положительным и измеряется от 0 до π .

§ 2.10. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть в общем уравнении прямой $Ax + By + D = 0$ коэффициент $B \neq 0$. Тогда $y = -(A/B)x - D/B$. Обозначим $b = -D/B$,

$$k = -\frac{A}{B}, \quad (2.29)$$

Получим

$$y = kx + b. \quad (2.30)$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов k, b . На оси Oy возьмем точку $B_1(0, b)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению (2.30), следовательно, эта точка лежит на рассматриваемой прямой (в этом и состоит геометрический смысл числа b). Пусть α — угол, образованный рассматриваемой прямой с осью Ox . Он считается положительным и отсчитывается от оси Ox против хода часовой стрелки.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка рассматриваемой прямой. Из рис. 2.9 видно, что $(y - b)/x = \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, из (2.30)

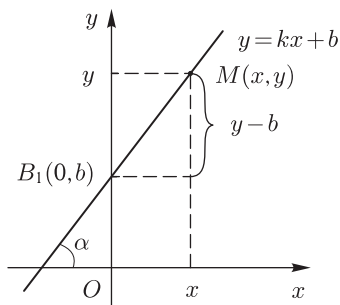


Рис. 2.9

следует, что $(y - b)/x = k$. Сравнив два последних соотношения, получим $k = \operatorname{tg} \alpha$. Это соотношение определяет геометрический смысл коэффициента k , который называют *угловым коэффициентом прямой на плоскости*.

Условие параллельности прямых.

Если $A_1/A_2 = B_1/B_2$, то прямые (2.27), (2.28) параллельны, так как коллинеарны их нормальные векторы. С учетом формулы (2.29) записанное выше условие параллельности прямых можно представить в виде $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых. Если имеет место равенство $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, то прямые (2.27) и (2.28) перпендикулярны, так как перпендикулярны их нормальные векторы. С учетом (2.29) условие перпендикулярности прямых запишем так: $k_1 = -1/k_2$.

§ 2.11. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, и прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1)$, лежащая на прямой, и известен угловой коэффициент k этой прямой. Нужно записать ее уравнение.

Так как эта прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.30), т. е. $y_1 = kx_1 + b$. Полученное соотношение вычтем из (2.30) и придем к уравнению прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2.31)$$

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Нужно записать уравнение прямой, проходящей через них. Здесь можем воспользоваться уравнением (2.31), где величина k пока не известна. Учтем, что прямая проходит также через точку M_2 , поэтому координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2.31), т. е. $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Исключим k из последних двух уравнений. Для этого нужно соотношение (2.31) почленно поделить на последнее. Получим искомое уравнение

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

§ 2.12. Кривые второго порядка. Окружность

Кривой второго порядка называется линия на плоскости Oxy , определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x, y вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (2.32)$$

Здесь A, B, C, D, E, F — заданные числа, называемые *коэффициентами уравнения*. Считаем, что в этом уравнении коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю, поскольку в противном случае (2.32) обращается в уравнение первой степени.

Рассмотрим отдельные случаи уравнения (2.32) и соответствующие им кривые.

Окружность. Как мы уже знаем, окружность радиуса R с центром в точке $O_1(a, b)$ имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (2.33)$$

В левой части (2.33) раскроем скобки и получим

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \quad (2.34)$$

В уравнении (2.34) коэффициенты при квадратах текущих координат равны. Кроме того, в этом уравнении отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат. Легко проверить, что если в уравнении (2.32) $A = C, B = 0$, то оно будет определять окружность в плоскости Oxy (если уравнению отвечает множество точек). Чтобы убедиться в сказанном, достаточно уравнение (2.32) поделить на $A = C$, а затем в левой части выделить полные квадраты членов, содержащих x , и полные квадраты членов, содержащих y . Таким образом перейдем к уравнению вида (2.33):

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0.$$

§ 2.13. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a$, фокусы — через F_1 и F_2 , а расстояние между ними F_1F_2 через $2c$. Ось Ox проведем через фокусы. Начало координат O возьмем в середине отрезка, соединяющего фокусы. При указанном выборе осей координаты имеем $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка

эллипса, соединим ее с F_1 и F_2 (рис. 2.10). По определению эллипса сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна $2a$, т. е.

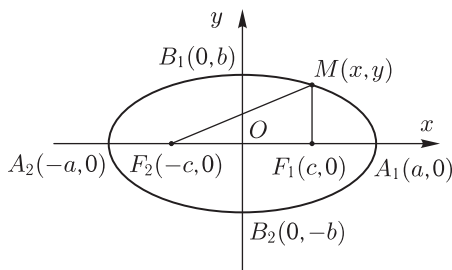


Рис. 2.10

$$F_1M + F_2M = 2a. \quad (2.35)$$

Из треугольника F_1MF_2 видно, что $2a > 2c$. Запишем расстояния через координаты:

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}, \\ F_2M &= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставим эти выражения в (2.35) и получим

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Последнему соотношению удовлетворяют координаты любой точки эллипса, следовательно, это соотношение — уравнение эллипса. Упростим его, перенеся второй корень из левой части вправо и возведя обе части уравнения в квадрат. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2, \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов оставим в правой части корень с множителем, остальные слагаемые перенесем влево и полученное выражение возведем в квадрат. Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ (так как $a > c$), считая $b > 0$. После простых преобразований получим соотношение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.37)$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим*. Имея уравнение (2.37), выясним форму эллипса.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. На плоскости Oxy возьмем точку $M'(x, -y)$, имеющую ту же абсциссу x , что и точка M ,

и ординату $-y$, отличающуюся от ординаты точки M только знаком. Точка M' симметрична M относительно оси Ox . Уравнение (2.37) содержит y только во второй степени, $y^2 = (-y)^2$. Координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению эллипса, но тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты точки M' . Получаем, что точка M' лежит на эллипсе, но сказанное относится к произвольной точке M эллипса, следовательно, эллипс будет симметричным относительно оси Ox . Так как в (2.37) x содержится только в квадрате, рассуждая аналогично, покажем, что ось Oy также является осью симметрии эллипса, следовательно, начало координат O — центр симметрии эллипса. В силу симметрии форму эллипса достаточно выяснить для первой четверти плоскости Oxy , в которой $x > 0$ и $y > 0$. Для таких значений x и y уравнение (2.37) запишем так:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.38)$$

Получили выражение для ординаты y точки M с абсциссой x . Когда абсцисса точки M принимает значение $x = 0$, то согласно (2.38) ее ордината $y = b$, а точка M находится на Oy в точке $B_1(0, b)$. С увеличением абсциссы точки M ордината этой точки согласно (2.38) уменьшается. Точка M опускается, и при $x = a$ ордината этой точки будет равна нулю, а M совпадет с точкой $A_1(a, 0)$. Остальные части эллипса вычерчиваются по симметрии. Точки A_1, B_1, A_2, B_2 называются *вершинами эллипса*, а числа $2a = A_1A_2$ и $2b = B_1B_2$ — *большой и малой осями эллипса* соответственно (рис. 2.10).

§ 2.14. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 2.11). Обозначим эту постоянную $2a > 0$, а фокусы — через F_1 и F_2 . Пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Ось Ox проведем через фокусы. Начало координат O возьмем в середине отрезка F_1F_2 . Тогда фокусы имеют координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы, тогда по определению

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \quad (2.39)$$

Знак «+» берется, когда левая часть положительна, а знак «-» — когда левая часть отрицательна. Расстояния F_1M и F_2M , как и раньше, выражаются формулами (2.36). Подставим (2.36) в (2.39):

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (2.40)$$

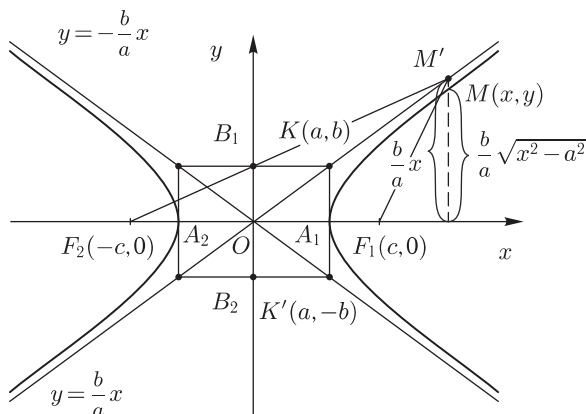


Рис. 2.11

Получили уравнение гиперболы. Как видно из рис. 2.11, $2c$ есть длина стороны F_1F_2 треугольника F_1F_2M , и она больше $2a$, поэтому $c^2 - a^2 = b^2$, где число b будем считать положительным. Уравнение (2.40) упростим, убрав корни так же, как в уравнении эллипса. Получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.41)$$

Исследуем форму гиперболы, исходя из уравнения (2.41) (как и в случае эллипса). Так как (2.41) содержит x и y только во второй степени, то Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы (аналогично случаю эллипса), поэтому точка пересечения этих осей — начало координат $O(0,0)$ — центр симметрии гиперболы. Ясно, что для установления вида гиперболы достаточно рассмотреть картину в первой четверти плоскости, где $x > 0$ и $y > 0$. Для таких значений x, y из уравнения (2.41) выразим y и получим

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (2.42)$$

Эта формула выражает ординату y точки M гиперболы, абсцисса которой есть x . При $x = a$ ордината $y = 0$, получим точку $A_1(a, 0)$ гиперболы. С увеличением абсциссы точки M ее ордината согласно (2.42) увеличивается. Точка M уходит вправо, неограниченно поднимаясь вверх. Остальные части гиперболы строятся по симметрии.

Определим вид гиперболы, когда OM неограниченно увеличивается. Возьмем прямую с уравнением

$$y = (b/a)x, \quad (2.43)$$

проходящую через точки $K(a, b)$ и $O(0, 0)$. Пусть M' — точка прямой (2.43), имеющая ту же абсциссу x , что и точка M гиперболы. Ординаты этих точек равны $(b/a)x$ и $(b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$, так как они удовлетворяют уравнениям (2.43) и (2.42) соответственно. Разность между указанными ординатами равна расстоянию между точками M и M' , следовательно,

$$\begin{aligned} MM' &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Для положительных x знаменатель с увеличением x неограниченно увеличивается, поэтому дробь убывает. Таким образом, MM' стремится к нулю, т.е. точка M гиперболы приближается к точке M' прямой. В силу симметрии относительно $O(0, 0)$ такая же картина будет в третьей четверти плоскости.

Возьмем теперь прямую

$$y = -(b/a)x. \quad (2.44)$$

Она симметрична с прямой (2.43) относительно Ox , проходит через точку $O(0, 0)$ и через точку $K'(a, -b)$, симметричную с K относительно Ox . В силу симметрии гиперболы относительно оси абсцисс ясно, что гипербола по отношению к прямой (2.44) расположена аналогично ее расположению к прямой (2.43). Прямые (2.43) и (2.44) называются *асимптотами*.

При построении гиперболы целесообразно сначала начертить ее асимптоты. Точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ пересечения гиперболы с осью Ox называются *вершинами гиперболы*. Расстояние между ними $2a = A_1A_2$ называется *действительной осью гиперболы*; число $2b = B_1B_2$ называется *мнимой осью* (рис. 2.11).

§ 2.15. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*. Пусть F — фокус. Ось Ox проведем через F перпендикулярно директрисе NQ в направлении от нее (рис. 2.12).

Пусть p — расстояние от фокуса F до директрисы. Это число задано и называется *параметром параболы*. Начало координат возьмем в середине перпендикуляра, опущенного из точки F на директрису. Тогда фокус будет иметь координаты $F(p/2, 0)$, а директриса имеет уравнение $x = -p/2$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Из рис. 2.12 видно, что расстояние

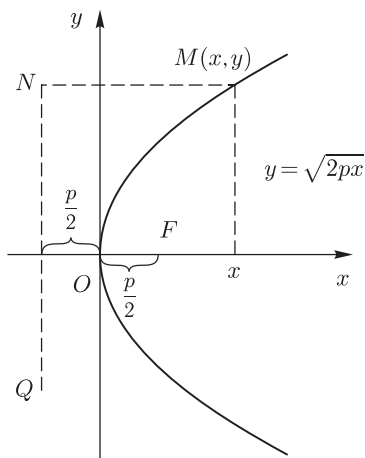


Рис. 2.12

$$MN = \frac{p}{2} + x. \quad (2.45)$$

Запишем расстояние от F до M :

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} \quad (2.46)$$

Для любой точки M параболы имеем $MN = FM$ (по определению). Подставим сюда выражения (2.45), (2.46) и получим уравнение параболы

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Упростим его, избавляясь от корня. Получим *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px. \quad (2.47)$$

Исследуем форму параболы по уравнению (2.47). Так как это уравнение содержит y только во второй степени, то, как и в случае эллипса, Ox является осью симметрии параболы. Следовательно, вид параболы достаточно установить в верхней полуплоскости, где $y > 0$. Для таких значений y уравнение (2.47) запишем в виде $y = \sqrt{2px}$. Эта формула выражает ординату точки M , абсцисса которой равна x . Когда $x = 0$, согласно последней формуле $y = 0$, точка M совпадает с $(0, 0)$. С увеличением абсциссы x точки M ее ордината, равная $\sqrt{2px}$, неограниченно растет, и точка M уходит вверх и вправо. Остальная часть параболы вычерчивается симметрично.

Если Ox провести от F к директрисе, то получим параболу, изображенную на рис. 2.13. Легко проверить, что уравнение параболы в этом случае будет иметь вид $y^2 = -2px$.

Пусть теперь ось Oy направлена перпендикулярно директрисе в направлении от нее и проходит через F . При этом уравнение параболы будет иметь вид $x^2 = 2py$ (рис. 2.14).

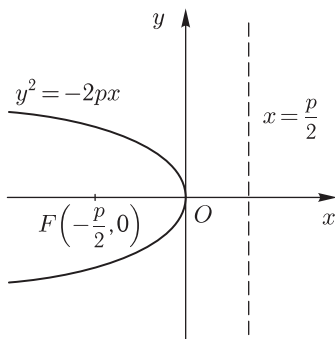


Рис. 2.13

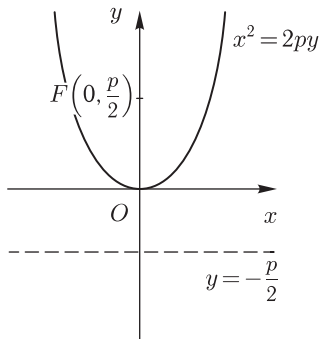


Рис. 2.14

§ 2.16. Преобразование координат на плоскости

Параллельный перенос осей координат. Пусть Oxy — исходная система координат, $O'x'y'$ — новая система координат, полученная параллельным переносом исходной системы, как показано на рис. 2.15. Положение новой системы по отношению к старой определим, задав координаты $x_{O'}$, $y_{O'}$ нового начала O' в старой системе координат, где $x_{O'}$, $y_{O'}$ — заданные числа. Пусть x' , y' — координаты точки M в новой системе, x , y — координаты точки M в исходной системе. Как видно из рис. 2.15, $x = x' + x_{O'}$, $y = y' + y_{O'}$. Итак,

$$\begin{cases} x = x' + x_{O'}, \\ y = y' + y_{O'}. \end{cases} \quad (2.48)$$

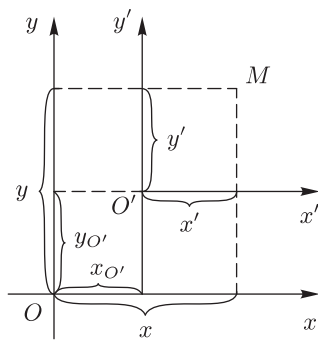


Рис. 2.15

Эти формулы выражают старые координаты x , y точки M через ее новые координаты.

Поворот осей координат. Пусть Oxy — исходная система координат, а новая система координат получена поворотом исходной вокруг начала координат на заданный угол α (рис. 2.16), который берется со знаком «+», если отсчет ведется против хода часовой стрелки от оси Ox . Пусть x , y — координаты точки M в системе

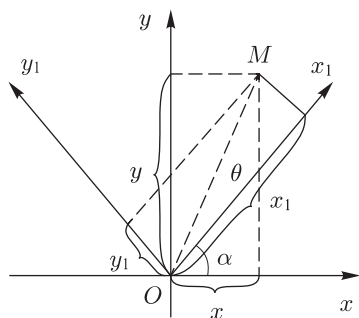


Рис. 2.16

Oxy , x_1 , y_1 — координаты точки M в системе Ox_1y_1 . Пусть $\rho = OM$ и θ — угол, образованный отрезком OM с осью Ox_1 , причем, как и α , этот угол берется со знаком «+», если отсчет ведется от оси Ox_1 против хода часовой стрелки. Из рис. 2.16 видно, что

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad y_1 = \rho \sin \theta. \quad (2.49)$$

С другой стороны,

$$x = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad y = \rho \sin(\theta + \alpha). \quad (2.50)$$

Перепишем формулы (2.50), используя известные формулы тригонометрии для косинуса и синуса суммы: $x = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \sin \theta \sin \alpha$, $y = \rho \sin \theta \cos \alpha + \rho \cos \theta \sin \alpha$. С учетом (2.49) запишем

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.51)$$

Эти формулы выражают старые координаты точки $M(x, y)$ через ее новые координаты в случае поворота осей координат.

Общий случай. Пусть Oxy — исходная система координат, $O_1x_1y_1$ — новая система координат (рис. 2.17). Положение новой системы по отношению к старой определим, задав:

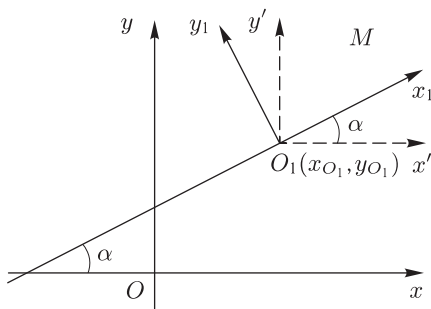


Рис. 2.17

- координаты x_{O_1} , y_{O_1} нового начала O_1 в старой системе координат;
- угол α , который образует ось O_1x_1 с Ox .

Пусть x , y — координаты точки M в старой системе, а x_1 , y_1 — координаты точки M в новой системе. Нужно найти связь между ними. С этой целью введем вспомогательную систему координат $O_1x'y'$, полученную параллельным переносом старой системы Oxy . Пусть x' , y' — координаты точки M в этой вспомогательной системе. Так как новая система координат $O_1x_1y_1$ получена поворотом вспомогательной системы $O_1x'y'$ на угол α , то координаты x' , y' точки M через координаты

ты x_1, y_1 этой точки выражаются формулами (2.51), в которых x, y нужно заменить на x', y' :

$$\begin{cases} x' = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y' = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.52)$$

Так как система координат $O_1x'y'$ получена параллельным переносом Oxy , то координаты x, y точки M в исходной системе выражаются через координаты x', y' по формулам (2.48), в которых O' нужно заменить на O_1 : $x = x' + x_{O_1}, y = y' + y_{O_1}$. В эти формулы вместо x', y' подставим (2.52) и получим

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha + x_{O_1}, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + y_{O_1}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Эти формулы выражают старые координаты x, y точки M через ее координаты x_1, y_1 в новой системе.

Преобразования координат на плоскости применяются, в частности, для упрощения вида уравнений кривых. В системе координат Oxy возьмем, например, эллипс с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.54)$$

Подставим вместо x, y их выражения (2.53) через x_1, y_1 , тем самым получим уравнение эллипса в новой системе координат $O_1x_1y_1$. Это будет уравнение общего вида (после раскрытия скобок)

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0.$$

Таким образом, перейдя к системе $O_1x_1y_1$, от канонического уравнения (2.54) эллипса мы перешли к более сложному уравнению — уравнению второй степени общего вида. Можно показать, что, наоборот, от последнего уравнения в системе $O_1x_1y_1$, подобрав другую систему координат Oxy , можно получить каноническое уравнение, определяющее либо окружность, либо эллипс, либо параболу, либо гиперболу, либо пару прямых, как, например, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ ($x - y = 0$, $x + y = 0$), если не имеет место случай, когда уравнение определяет лишь точку или не определяет никакого множества точек.

§ 2.17. Поверхности второго порядка. Сфера. Цилиндр

Поверхностью второго порядка в пространстве $Oxyz$ называется поверхность, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Здесь $a_{11}, a_{22}, \dots$ — действительные числа, называемые *коэффициентами*. В зависимости от коэффициентов это уравнение может определять поверхность, линию или точку (например, уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ отвечает точка $O(0, 0, 0)$), или пару плоскостей (например, уравнению $x^2 - y^2 = 0$ отвечает пара плоскостей $x - y = 0$ и $x + y = 0$), а также может не определять никакого множества точек (например, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$).

Рассмотрим частные виды поверхностей второго порядка.

Сфера с центром в точке $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R имеет уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где x_0, y_0, z_0, R — заданные числа (рис. 2.18). Раскрыв скобки и перенеся R^2 в левую часть, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

Нетрудно проверить, что уравнение второй степени относительно x, y, z , в котором коэффициенты при x^2, y^2, z^2 равны, а члены с произведениями координат отсутствуют, представляет собой уравнение сферы (кроме случаев, когда это уравнение не определяет никакой поверхности).

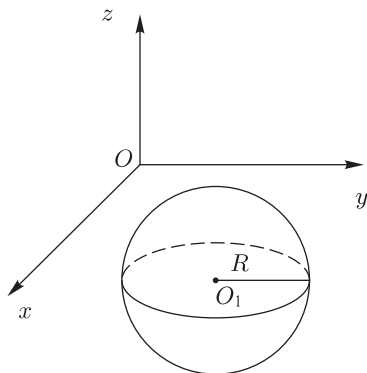


Рис. 2.18

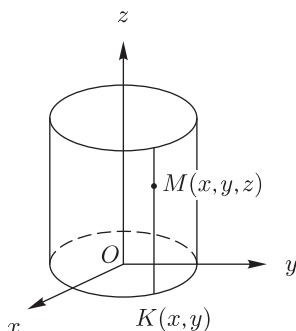


Рис. 2.19

Цилиндры. *Цилиндрической* называется поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторому направлению и пересекающей данную линию. Последняя называется *направляющей цилиндрической поверхности*, а сама прямая — *образующей*. Пусть, например, образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz и направляющей служит эллипс (рис. 2.19) в плоскости Oxy с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.55)$$

Эта поверхность называется *эллиптическим цилиндром*. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка этого цилиндра, а точка $K(x, y)$ — проекция M на плоскость Oxy . Ясно, что абсциссы и ординаты точек M и K совпадают. Так как точка K лежит на эллипсе, то ее координаты x и y удовлетворяют уравнению (2.55). Но тогда этому уравнению удовлетворяют координаты x и y точки M цилиндра. Значит, (2.55) есть уравнение цилиндра.

Итак, уравнение (2.55) на плоскости Oxy определяет эллипс, а в пространстве $Oxyz$ — эллиптический цилиндр с образующей, параллельной Oz , направляющей которого является указанный эллипс.

Упражнение. Изобразите самостоятельно: 1) гиперболический цилиндр с уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и образующей, параллельной оси Oz ; 2) параболический цилиндр с уравнением $y^2 = 2pz$ и образующей, параллельной оси Ox .

§ 2.18. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.56)$$

где a, b, c — заданные положительные числа.

Исследуем форму этой поверхности методом сечений. При сечении поверхности (2.56) плоскостью $z = h$ (h — постоянная, $-c < h < c$), проходящей через точку $z = h$ на оси Oz параллельно плоскости Oxy , получим кривую, которая определяется совокупностью двух уравнений

$$\begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 + h^2/c^2 = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В первом уравнении перенесем h^2/c^2 вправо и поделим обе части уравнения на $1 - h^2/c^2$. Получим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1 - h^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - h^2/c^2)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Эта система уравнений определяет эллипс с полуосями $a_1 = a(1 - h^2/c^2)^{1/2}$ и $b_1 = b(1 - h^2/c^2)^{1/2}$, расположенный в плоскости $z = h$. При $h = 0$ значения a_1 и b_1 , очевидно, достигают своих наибольших значений $a_1 = a$ и $b_1 = b$, т. е. на плоскости Oxy получаем

эллипс наибольших размеров. При $|h| = c$ значения a_1 и b_1 достигают наименьших значений $a_1 = 0$ и $b_1 = 0$. Это означает, что плоскости

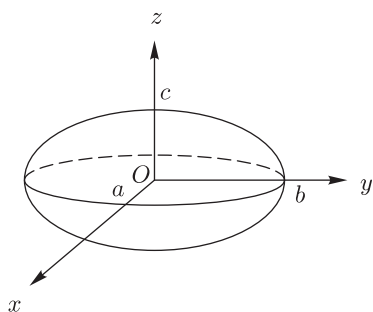


Рис. 2.20

$z = c$ и $z = -c$ имеют с эллипсоидом по одной общей точке $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$ соответственно. При $|h| > c$ эллипсоид не имеет общих точек с плоскостью $z = h$. Аналогичная картина будет при сечении эллипсоида плоскостью $x = h_1$ ($-a \leq h_1 \leq a$) или плоскостью $y = h_2$ ($-b \leq h_2 \leq b$) (рис. 2.20).

При $a = b$ имеем *эллипсоид вращения*, поскольку в плоскости $z = h$ вместо эллипса получаем окружность. Эта поверхность получается

при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенного в плоскости Oxz , вокруг оси Oz .

§ 2.19. Конус

Конусом второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением

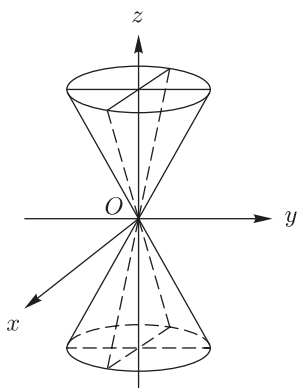


Рис. 2.21

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (2.57)$$

где a, b, c , — заданные положительные числа (рис. 2.21). Исследовав форму этой поверхности, как и эллипсоида, методом сечений, получим, что при сечении плоскостью $z = h$ (h — постоянная) получается эллипс с полуосями $a_1 = a|h|/c$ и $b_1 = b|h|/c$. Очевидно, что при $h = 0$ имеем $a_1 = b_1 = 0$, т. е. конус (2.57) имеет с плоскостью Oxy одну общую точку — начало координат. С увеличением $|h|$ значения a_1 и b_1 увеличиваются. Покажем те-

перь, что при сечении поверхности (2.57) плоскостью с уравнением $y = kx$ (k — постоянная), проходящей через Oz , получается пара прямых, проходящих через начало координат.

В самом деле, при таком сечении получается линия, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

Заменим в первом уравнении y на kx , получим

$$\begin{cases} x^2/a^2 + (kx)^2/b^2 - z^2/c^2 = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

Но первое уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = \frac{z}{c} \quad \text{и} \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = -\frac{z}{c}.$$

Поэтому последняя система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = kx \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + \frac{z}{c} = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

Все уравнения в этих системах определяют плоскости, проходящие через начало координат. Значит, каждая система определяет в пространстве прямую, проходящую через начало координат. При $a = b$ получаем *конус вращения* (вокруг оси Oz).

§ 2.20. Однополостный и двуполостный гиперboloиды

Однополостный гиперboloид — это поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.58)$$

где a, b, c — заданные положительные числа.

Исследуем форму этой поверхности. В сечении ее плоскостью $z = h$ получается эллипс с полуосями $a(1 + h^2/c^2)^{1/2}$ и $b(1 + h^2/c^2)^{1/2}$. С увеличением h эти полуоси увеличиваются. В сечениях поверхности (2.58) плоскостью Oyz (с уравнением $x = 0$) и плоскостью Oxz ($y = 0$) получаются гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

соответственно. Поверхность имеет вид, указанный на рис. 2.22. При $a = b$ получаем *однополостный гиперboloид вращения* (Oz — ось вращения).

На рассматриваемой поверхности лежат семейства прямых, которые называются *прямолинейными образующими*. В частности, система уравнений

$$\begin{cases} x/a + z/c = k(1 + y/b), \\ x/a - z/c = k^{-1}(1 - y/b), \end{cases} \quad (2.59)$$

где k — произвольное заданное число, в пространстве $Oxyz$ определяет прямую. Перемножив почленно уравнения системы получим уравнение (2.58). Следовательно, любая точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности (2.58). Таким образом, прямая (2.59) лежит на этой поверхности. Изменяя значение величины k в системе (2.59), получим семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (2.58). Другое семейство прямолинейных образующих этого гиперболоида определяется системой

$$\begin{cases} x/a + z/c = l(1 - y/b), \\ x/a - z/c = l^{-1}(1 + y/b), \end{cases}$$

где l — произвольное число.

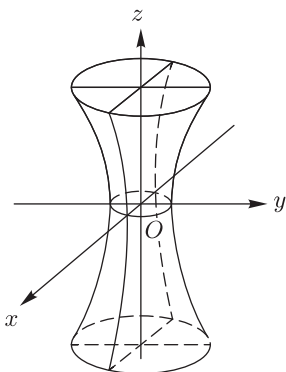


Рис. 2.22

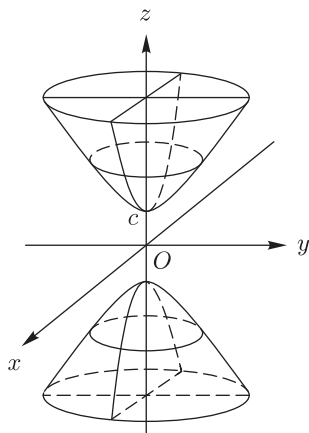


Рис. 2.23

Двуполостный гиперболоид — это поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (2.60)$$

где a, b, c — заданные положительные числа. В сечении поверхности (2.60) плоскостью $z = h$ ($|h| \geq c$) получается эллипс с полуосями $a\sqrt{-1 + h^2/c^2}$ и $b\sqrt{-1 + h^2/c^2}$ (рис. 2.23). При $|h| < c$ плоскость и поверхность не пересекаются.

В сечениях поверхности (2.60) плоскостями Oyz ($x = 0$) и Oxz ($y = 0$) будем иметь гиперболы $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$ и $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$ соответственно. При $a = b$ получим *двулопастный гиперболоид вращения* (Oz — ось вращения).

§ 2.21. Эллиптический и гиперболический параболоиды

Эллиптический параболоид — это поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (2.61)$$

где p и q — заданные положительные числа. Рассекая поверхность (2.61) плоскостью $z = h$ ($h \geq 0$), в сечении получим эллипс с полуосями $\sqrt{2hp}$ и $\sqrt{2hq}$ (рис. 2.24). Поверхность (2.61) пересекается с плоскостью Oxz ($y = 0$) по параболе $x^2 = 2pz$, а с плоскостью Oyz ($x = 0$) по параболе $y^2 = 2qz$. Нетрудно проверить, что в сечениях любыми плоскостями вида $x = h$ или $y = h$ также получаются параболы. При $p = q$ получим *параболоид вращения* (Oz — ось вращения).

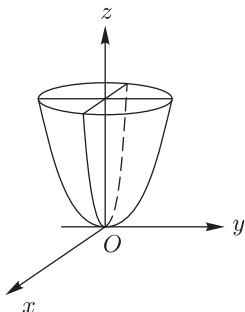


Рис. 2.24

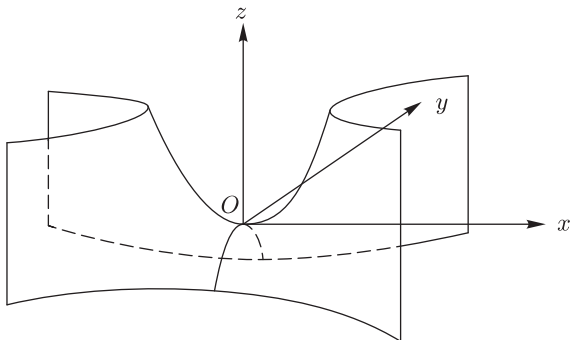


Рис. 2.25

Гиперболический параболоид — это поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (2.62)$$

где p и q — заданные положительные числа. Поверхность (2.62) пересекается с плоскостью Oxz ($y = 0$) по параболе $x^2 = 2pz$, ветви которой направлены в положительную сторону оси Oz (рис. 2.25).

В сечении поверхности (2.62) плоскостью $x = h$ получается кривая, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} x^2/p - y^2/q = 2z, \\ x = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} h^2/p - y^2/q = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad (2.63)$$

Первое уравнение запишем так: $y^2 = -2q(z - h^2/(2p))$. Оно определяет на плоскости $x = h$ параболу с ветвями, направленными в отрицательную сторону оси Oz , причем вершина параболы имеет координаты $x = h, y = 0, z = h^2/(2|p|)$. При изменении h парабола (2.63) описывает поверхность, определяемую уравнением (2.62). Гиперболический параболоид содержит два семейства прямолинейных образующих, определяемых системами уравнений

$$\begin{cases} x/\sqrt{p} + y/\sqrt{q} = 2kz, \\ x/\sqrt{p} - y/\sqrt{q} = 1/k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x/\sqrt{p} + y/\sqrt{q} = 1/l, \\ x/\sqrt{p} - y/\sqrt{q} = 2lz, \end{cases}$$

где k и l — произвольные постоянные. Доказательство проводится так же, как и для однополостного гиперболоида.

Легко проверить, что в сечении поверхности плоскостью $y = h$ получаются параболы, а в сечении плоскостью $z = h$ — гиперболы.

§ 2.22. Понятие о многомерном евклидовом пространстве

Известно, что положение точки на прямой определяется одним числом — ее координатой, положение точки на плоскости определяется двумя числами — координатами этой точки, а положение точки в пространстве — тремя числами, ее координатами. Обобщая эти представления, можно ввести 4-мерное, ..., n -мерное пространство и таким путем построить n -мерную геометрию. Известно, что стереометрия основывается на системе аксиом — аксиоматике. Аналогично можно построить многомерную евклидову геометрию, взяв за основу аксиоматику, аналогичную аксиоматике стереометрии. Но исторически многомерная геометрия была создана иначе, а именно, на основании так называемых *координатных аксиом*. Сформулируем их.

Каждой точке M отвечает определенная последовательность n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координат этой точки; в этом случае пишут $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Каждой паре точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ ставится в соответствие положительное число, называемое *расстоянием между этими точками* и определяемое следующим образом:

$$MM' = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}.$$

Геометрическими считаются лишь такие соотношения, которые связывают расстояния между точками и сохраняются при умножении всех расстояний на одно и то же число (как и при преобразовании подобия в стереометрии).

Теория, основанная на указанных аксиомах, называется *n*-мерной евклидовой геометрией. Множество точек M , для которых справедливы эти аксиомы, называется *n*-мерным евклидовым пространством.

Пусть $A(x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A)$ и $B(x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B)$ — две точки в пространстве. Вектором, у которого начало находится в точке A , а конец — в точке B , назовем величину, обозначаемую $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB} = \vec{a}$), координаты которой равны разностям координат конца и начала (как в трехмерном пространстве):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_1^B - x_1^A, x_2^B - x_2^A, \dots, x_n^B - x_n^A).$$

Вектор называется *нулевым*, если все его координаты равны нулю, в противном случае это *ненулевой* вектор.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ в *n*-мерном евклидовом пространстве. Они называются *равными*, если все их соответствующие координаты равны друг другу, т. е. $a_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Суммой этих векторов называется вектор, обозначаемый $\vec{a} + \vec{b}$ и определяемый формулой $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$. Иначе говоря, при сложении векторов их соответствующие координаты складываются. Аналогично определяется разность векторов.

Произведением $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$, т. е. при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это же число.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (2.64)$$

Запишем (2.64) для случая, когда $\vec{a} = \vec{b}$, т. е. $\vec{b}$ заменим на $\vec{a}$: $(\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. Квадратный корень из этого числа называется *нормой вектора $\vec{a}$* и обозначается

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (2.65)$$

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Пусть в рассматриваемом *n*-мерном пространстве заданы векторы $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$, которые называются *базисными векторами*. Норма каждого из них равна единице, это видно из (2.65). Кроме того, каждые два из этих векторов ортогональны. Указанные векторы умножим соответственно

на $a_1, a_2, \dots, a_n$ — координаты вектора $\vec{a}$ — и сложим полученные произведения. Получим

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n = \\ = (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a}.$$

Итак, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n$. Это есть разложение вектора $\vec{a}$ по базисным векторам в n -мерном пространстве.

Как и в трехмерном пространстве, каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем ставить в соответствие ее радиус-вектор $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, концом которого является точка M , а началом — точка $O(0, 0, \dots, 0)$.

Пусть в n -мерном пространстве заданы точка M_0 своим радиус-вектором $\vec{r}_0$ и ненулевой вектор $\vec{a}$. *Прямой* в этом пространстве называется множество точек, радиус-векторы которых определяются формулой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, где t — скаляр (параметр), который принимает любые действительные значения.

Пусть в пространстве заданы точка M_0 своим радиус-вектором $\vec{r}_0$ и два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых не выполняются условия коллинеарности $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$.

Плоскостью в n -мерном пространстве называется множество точек, радиус-векторы которых определяются формулой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t + \vec{b}s$, где t, s — действительные скалярные величины, принимающие любые действительные значения.

Аналогично можно ввести понятие сферы в n -мерном пространстве.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 3.1. Определители высших порядков

Определитель *четвертого порядка* содержит 16 элементов и обозначается

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Как и раньше, элементы этого определителя обозначаются a_{ij} , где i — номер строки, j — номер столбца, которым принадлежит элемент a_{ij} , $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$. *Минором* M_{ij} для элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель третьего порядка, получаемый вычеркиванием строки и столбца, которым принадлежит элемент a_{ij} . Зная этот минор, определим *алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определителя четвертого порядка

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (3.1)$$

Определителем четвертого порядка называется число

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (3.2)$$

Таким образом, определитель четвертого порядка выражается через определители третьего порядка. Аналогично, с помощью определителя четвертого порядка введем понятие определителей пятого порядка, шестого порядка и т.д. Зная определение определителя $(n-1)$ -го порядка, введем понятие определителя n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \quad (3.3)$$

Здесь $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ — алгебраические дополнения элементов первой строки $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$. Эти алгебраические дополнения по формуле (3.1) выражаются через миноры M_{ij} для соответствующих элементов первой строки. Миноры — определители $(n-1)$ -го порядка. Таким

образом, определитель n -го порядка выражается по формуле (3.3) через определители $(n - 1)$ -го порядка. Соотношение (3.3) — разложение определителя n -го порядка по элементам первой строки.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ определителя образуют его *главную диагональ*. Можно показать, что определитель раскладывается по элементам любой строки или любого столбца. Например, разложения определителя по элементам i -й строки и j -го столбца имеют соответственно вид

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (3.4)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (3.5)$$

Таким образом, определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда (строки или столбца) на их алгебраические дополнения.

§ 3.2. Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его столбцы сделать строками с теми же номерами (эта операция называется *транспонированием*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства опускаем (оно основано на (3.4) и (3.5)).

2. Определитель лишь изменит знак, если поменять местами два каких-либо ряда (две строки или два столбца). Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В справедливости последнего равенства убедимся, разложив определители слева и справа по элементам соответственно первого и второго столбцов.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Чтобы доказать это свойство, достаточно переставить одинаковые ряды и воспользоваться свойством 2.

4. Множитель, общий для элементов некоторого ряда определителя, можно вынести за знак определителя. Например, пусть λ — число, тогда

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Чтобы доказать это свойство, достаточно разложить определитель по элементам ряда, содержащим указанный множитель.

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Это свойство доказывается разложением определителя по нулевым элементам соответствующей строки (столбца).

6. Если к элементам некоторого ряда (строки или столбца) прибавить соответствующие элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \lambda a_{n2}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Чтобы доказать это свойство, нужно разложить определитель в правой части по элементам первого столбца и учесть третье свойство 3.

7. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю. Например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0.$$

Рассматриваемое свойство доказывается разложением определителя по элементам второго ряда с последующей заменой его элементов на соответствующие элементы первого ряда.

Приведенные выше свойства для определителей второго порядка очевидны, а для определителей третьего порядка доказываются проверкой.

§ 3.3. Матрицы и действия над ними.

Обратная матрица

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, содержащая mn чисел. Она обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots$ называются *элементами матрицы*. Коротко эту матрицу обозначают так: $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Здесь

i — номер строки, j — номер столбца элемента a_{ij} . Матрицу иногда обозначают и так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если столбцы матрицы сделать строками с теми же номерами, то полученная матрица называется *транспонированной* и обозначается

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк и число столбцов совпадают, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ матрицы*. Число n называется *порядком матрицы*. Квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем матрицы*, обозначаемое $\Delta(A)$ и равное

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной* и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строчной* и обозначается $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Матрица, состоящая из одного столбца, называется *столбцовой*, например,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть даны две матрицы с одинаковым числом строк и столбцов: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Эти матрицы называются *равными* (при этом пишут $A = B$ или $(a_{ij}) = (b_{ij})$), если все их соответствующие элементы равны друг другу, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Суммой матриц A и B называется матрица, обозначаемая $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех значений i, j . Это правило можно записать так: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Аналогично вводится понятие *разности* двух матриц.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица, обозначаемая λA , элементы которой равны произведениям числа λ на соответствующие элементы матрицы A , т. е. $\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$. Иначе говоря, чтобы умножить матрицу на число λ , нужно умножить на это число каждый ее элемент (для сравнения напомним, что для умножения определителя на число нужно умножить на это число все элементы только одного ряда).

Умножение матриц. Даны матрица $A = (a_{ij})$, имеющая m строк и k столбцов, и матрица $B = (b_{ij})$, имеющая k строк и n столбцов. *Произведением* этих матриц называется матрица, обозначаемая $C = AB$ (A — первая матрица), элементы c_{ij} которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}, \quad (3.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Изобразим схематично эти матрицы и их произведение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Формула (3.6) показывает, что элемент c_{ij} (i -й строки и j -го столбца) матрицы $C = AB$ равен сумме произведений элементов i -й строки первой матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы B . Следовательно, чтобы получить элементы $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}$ i -й строки матрицы $C = AB$, нужно элементы i -й строки A умножить на соответствующие элементы первого столбца B , и, сложив, найти c_{i1} ; умножив элементы i -й строки A на соответствующие элементы

второго столбца B и сложив, получить c_{i2} и т.д.; умножив элементы i -й строки A на соответствующие элементы n -го столбца B и сложив, получим c_{in} .

Таким образом, элементы i -й строки матрицы C получаются с помощью i -й строки первой матрицы A . Это относится к любой строке матрицы C . Поэтому ясно, что число строк C равно числу строк A , а число столбцов C равно числу столбцов матрицы B , так как номер столбца j элемента c_{ij} совпадает с номером столбца j матрицы B .

Аналогично найдем $C_1 = BA$, если число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A . Если это не так, то произведения BA не существует. Если даже AB и BA существуют, то легко проверить на примерах, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Свойства умножения матриц. Пусть даны три матрицы A , B и C . Тогда $A(BC) = (AB)C$; $A(B + C) = AB + AC$.

Пусть A — квадратная матрица, а E — единичная матрица того же порядка, что и A . Нетрудно проверить, что $AE = EA = A$.

Обратная матрица. Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы есть число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть этот определитель не равен нулю и A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

Обратной к данной матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} и равная

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta(A)} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta(A)} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta(A)} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Отсюда видно, что для построения матрицы A^{-1} , обратной к матрице A , нужно:

- элементы A заменить на их алгебраические дополнения;
- все дополнения поделить на $\Delta(A)$ — определитель матрицы A ;
- полученную матрицу транспонировать.

ной соответственно первого, второго, ..., n -го его столбцов на столбец свободных членов системы (3.7), т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

.....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Запишем разложение определителя (3.11) системы (3.7) по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}. \quad (3.16)$$

Заменив элементы первого столбца $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ соответственно на $b_1, b_2, \dots, b_n$ — свободные члены системы (3.7), — получим разложение

$$\Delta_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \quad (3.17)$$

определителя Δ_1 по элементам первого столбца. Аналогично запишем разложение определителя Δ_2 по элементам второго столбца

$$\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2}, \quad (3.18)$$

и т. д. Наконец, получим разложение определителя Δ_n по элементам последнего столбца:

$$\Delta_n = b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn}. \quad (3.19)$$

По формуле (3.14) будем иметь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Следующие преобразования, называемые *элементарными*, переводят заданную систему в равносильную (эквивалентную) ей:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на ненулевое число;
- прибавление к обеим частям данного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое ненулевое число.

Метод Гаусса заключается в следующем. Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то переставим уравнения так, чтобы в первом уравнении коэффициент при первом неизвестном не равнялся нулю, или с этой же целью перенумеруем неизвестные, что приведет к перестановке соответствующих столбцов коэффициентов). Из всех уравнений, кроме первого, в системе (3.20) исключим неизвестную x_1 , для этого ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $-a_{31}/a_{11}$, и т.д. Тогда придем к системе вида

[illegible]

Пусть $a'_{22} \neq 0$ (если $a'_{22} = 0$, то снова переставим уравнения или перенумеруем неизвестные $x_2, \dots, x_n$). Теперь аналогично предыдущему из всех уравнений, кроме первого и второго, исключим x_2 . Если система (3.20) совместна, т.е. при указанных преобразованиях в ней не окажется противоречивого соотношения $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, $b \neq 0$, и процесс можно продолжить. В конечном счете путем вышеуказанных преобразований придем к одному из следующих случаев:

Ранг матрицы — это такое число r , что по крайней мере один определитель r -го порядка, получаемый из этой матрицы при удалении

некоторого числа строк и (или) столбцов, отличен от нуля, а все определители $(r + 1)$ -го порядка, если они существуют, равны нулю. Без доказательства отметим, что при $m \leq n$ данное определение ранга матрицы равносильно другому, используемому здесь определению: рангом матрицы называется число ненулевых строк в эквивалентной треугольной или ступенчатой матрице. Ясно, что для определения ранга матрицы сначала ее нужно преобразовать методом Гаусса и привести к треугольной или ступенчатой матрице, эквивалентной исходной.

Пусть система уравнений (3.20) преобразована методом Гаусса и приведена либо к системе (3.21), либо к системе (3.22). При этих преобразованиях происходят соответствующие преобразования основной и расширенной матриц системы (3.20). Совместность системы (3.20) равносильна отсутствию в преобразованной системе (3.21) или (3.22) противоречивого соотношения $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, $b \neq 0$ (здесь равные нулю коэффициенты образовали бы нулевую строку основной матрицы преобразованной системы, а эти же коэффициенты и число $b \neq 0$ — ненулевую строку расширенной матрицы этой системы). Это в свою очередь равносильно совпадению числа ненулевых строк основной и расширенной матриц преобразованной системы (3.21) или (3.22). А это последнее, в свою очередь, равносильно совпадению рангов основной и расширенной матриц исходной системы. Итак, справедлива

Теорема 3.2 (Кронекера–Капелли). *Если система уравнений совместна, то ранги ее основной и расширенной матриц равны, и наоборот, если ранги основной и расширенной матриц равны, то система совместна.*

§ 3.8. Однородные системы

Система уравнений (3.20) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю: $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $\dots$, $b_m = 0$. Ясно, что однородная система всегда совместна, так как имеет очевидное тривиальное нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$, $x_n = 0$. Если среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеется хотя бы одно отличное от нуля, то такое решение системы называется *ненулевым*.

Пусть в однородной системе (3.20) число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$). Такая система методом Гаусса приведет к ступенчатой системе, так как к треугольной системе мы можем прийти, лишь когда $m = n$. Но ступенчатая система имеет бесконечное множество решений, среди которых обязательно найдется ненулевое. Например, в системе (3.21) ненулевое решение получим, взяв $x_{r+1} \neq 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.3. *Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевые решения.*

Рассмотрим случай, когда в однородной системе (3.20) $m = n$. Для такой системы может быть доказана

Теорема 3.4. *Если однородная система из n уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения, то ее определитель равен нулю, и наоборот, если определитель указанной однородной системы равен нулю, то эта система имеет ненулевые решения.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы: дана однородная система (3.20), в которой $m = n$ и $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_n = 0$, и она имеет ненулевые решения; нужно доказать, что ее определитель равен нулю.

Предположим противное, т. е. что ее определитель $\Delta \neq 0$. Тогда решение этой системы из n уравнений с n неизвестными можем записать по формулам Крамера $x_1 = \Delta_1/\Delta, x_2 = \Delta_2/\Delta, \dots, x_n = \Delta_n/\Delta$. Это будет единственное решение. Но все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ содержат столбец свободных членов, состоящий из одних нулей, поэтому все они равны нулю. Следовательно, по формулам Крамера получим единственное решение рассматриваемой однородной системы $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ — нулевое решение. Это противоречит условию теоремы, согласно которому система имеет ненулевое решение, следовательно, предположение, что $\Delta \neq 0$, должно быть отброшено.

Докажем вторую часть теоремы: определитель однородной системы (3.20) n уравнений с n неизвестными равен нулю; нужно доказать, что система имеет ненулевые решения.

Заданную однородную систему преобразуем методом Гаусса, при этом обязательно придем к ступенчатой системе. (Если бы преобразованная система оказалась треугольной, то, как было показано выше, пришли бы к заключению, что определитель исходной системы не равен нулю, что не согласуется с условием теоремы.) Ступенчатая система имеет бесконечное множество решений, среди которых найдутся и ненулевые, поэтому исходная система имеет ненулевые решения. Теорема доказана.

При решении однородной системы целесообразно преобразовать ее методом Гаусса и привести к ступенчатой или треугольной системе.

Глава 4

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 4.1. Обозначения, переменные, интервалы

В математике используется большое количество символов, рассмотрим некоторые из них.

Квантор общности — это символ $\forall$. Запись $(\forall x)$ читается так: «для любого x ...», «для всех x ...». Например, запись $(\forall x > 0)$ означает «для любого положительного x ».

Квантор существования — символ $\exists$. Запись $(\exists x)$ читается так: «существует такое x , что...». Запись $(\exists x > 0)$ означает «существует такое положительное x , что...».

Символ $\Rightarrow$ обозначает *логическое следствие*. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что из утверждения A следует утверждение B . Символ $\Leftrightarrow$ обозначает *логическую равносильность*. Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из утверждения A следует утверждение B и наоборот.

Например, пусть A есть утверждение «Треугольник со сторонами a, b, c ($c > a, c > b$) является прямоугольным треугольником», а B есть утверждение « $c^2 = a^2 + b^2$, где a, b, c — положительные числа». Видим, что $A \Leftrightarrow B$, так как $A \Rightarrow B$ и, наоборот, $B \Rightarrow A$.

Например, запись

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N) (\forall x > N): |f(x) - b| < \varepsilon$$

читается так: для любого положительного числа ε существует такое число N , что для всех $x > N$ имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Переменные величины. Интервалы. В математике рассматривают только численные значения величин, при этом отвлекаются от их конкретного физического содержания.

Постоянной называется величина, которая принимает лишь одно числовое значение. Постоянные величины обозначают обычно буквами a, b, c и т. д.

Переменной называется величина, принимающая различные численные значения. Числовые значения переменной образуют некоторое множество действительных чисел. Например, множество чисел, удовле-

творящих неравенству $a < x < b$, называется *открытым интервалом* и обозначается $]a, b[$ или (a, b) . Числа a, b называются *концами интервала*. Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется *закрытым* или *замкнутым интервалом* и обозначается $[a, b]$.

Рассматриваются также *полузакрытые (полукоткрытые)* интервалы $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, обозначаемые соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ или $[a, b[,]a, b]$.

Интервалы могут быть бесконечными. Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, называется *бесконечным интервалом* и обозначается $(a, +\infty)$ или $]a, +\infty[$. Множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geq a$, обозначается $[a, +\infty)$ или $[a, +\infty[$. Множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x < b$, обозначается $(-\infty, b)$ или $] -\infty, b[$. Множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leq b$, обозначается $(-\infty, b]$ или $] -\infty, b]$. Наконец, множество всех действительных чисел есть бесконечный интервал, который обозначается $(-\infty, +\infty)$ или $] -\infty, +\infty[$.

§ 4.2. Абсолютная величина

Абсолютной величиной числа x называется число

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Из этого определения вытекает, что

$$|x| = |-x|; \quad (4.2)$$

$$|x| > 0, \quad x \neq 0. \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$x \leq |x|. \quad (4.4)$$

Действительно, при $x \geq 0$ по формуле (4.1) имеем $x = |x|$, и неравенство (4.4) выполняется. При $x < 0$ согласно (4.1) имеем $x = -|x| < |x|$, так как $|x| > 0$, т.е. снова выполняется (4.4).

Покажем, что соотношение

$$|x| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (4.5)$$

равносильно неравенству

$$-\varepsilon < x < \varepsilon. \quad (4.6)$$

Действительно,

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x < \varepsilon & \text{при } x \geq 0, \\ -x < \varepsilon & \text{при } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \varepsilon, \\ -\varepsilon < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon.$$

Свойства абсолютной величины:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \quad |x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|, \\ |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \quad |x_1/x_2| = |x_1|/|x_2| \quad (\text{при } x \neq 0).$$

Эти свойства легко обосновать с помощью (4.1)–(4.4).

§ 4.3. Функция, способы ее задания

Пусть x — переменная величина, M — множество ее значений, y — другая переменная величина и N — множество ее значений.

Функцией называется правило, по которому каждому значению x из множества M ставится в соответствие определенное значение y из множества N при условии, что каждое значение y из множества N отвечает хотя бы одному x из M . Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а зависимая переменная y — *функцией*. Множество M называется *областью определения функции*, а N — *областью значений* функции. Введенная функция обозначается $y = f(x)$ (здесь f означает не переменную, а вышеуказанное правило, устанавливающее соответствие между x и y). Говорят, что функция $y = f(x)$ *отображает* множество M на множество N . Вместо f применяются и другие буквы, например, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и др. В частности, если для функции $y = f(x)$ конкретному значению $x = x_0$ отвечает конкретное значение $y = y_0$, то пишут $y_0 = f(x_0)$ или $y|_{x=x_0} = y_0$.

Табличный способ задания функции. Задают ряд значений аргумента x и указывают соответствующие им значения функции y . Примерами такого способа задания функции являются известные таблицы логарифмов и тригонометрических функций.

Графический способ задания функции — это способ задания функции $y = f(x)$ с помощью ее графика.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости Oxy , для каждой из которых абсцисса x равна значению аргумента, а ордината равна соответствующему значению функции $y = f(x)$.

Как правило, будем рассматривать функции, графики которых представляют собой сплошные линии или линии, состоящие из нескольких сплошных кривых. Ясно, что соотношение $y = f(x)$ является уравнением этой линии.

Аналитический способ задания функции. Здесь функция может задаваться формулой, например, $y = x^2$, либо одновременно несколькими формулами для различных интервалов изменения x , например,

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Если функция задана одной формулой, без дополнительного указания области определения, то под последней понимается совокупность всех значений x , для которых эта формула имеет смысл и по которым можно вычислить соответствующие значения функции. Например, для функции $y = 1/(x - 2)$ областью определения является множество всех x , отличных от 2, т. е. множество $x < 2$ и $x > 2$ или совокупность интервалов $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. При $x = 2$ имеем $x - 2 = 0$, и формула теряет смысл.

Основные элементарные функции:

- постоянная функция $y = C = \text{const}$;
- степенная функция $y = x^n$, n — любое действительное число;
- показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);
- логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение сложной функции. Дана функция $y = f(U)$, причем аргумент U является функцией от x , т. е. $U = \varphi(x)$ и область значений функции $U = \varphi(x)$ является частью области определения функции $y = f(U)$. Следовательно, каждому x из области определения $\varphi(x)$ отвечает определенное значение $U = \varphi(x)$, а этому значению U отвечает определенное значение $y = f(U)$. Таким образом, каждому указанному x отвечает определенное значение y . Это означает, что y есть функция от x . Она называется *сложной функцией от x* и записывается в виде $y = f[\varphi(x)]$, где φ — внутренняя функция, f — внешняя функция, $U = \varphi(x)$ — промежуточный аргумент. Например, пусть $y = \sin U$, где $U = \lg x$, тогда получим сложную функцию $y = \sin(\lg x)$.

Ясно, что, рассуждая аналогично, можно ввести сложную функцию, состоящую из трех и большего числа функций.

Элементарной называется функция, определяемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций, с помощью конечного числа четырех арифметических действий $(+, -, /, \times)$ и конечного числа операций взятия функции от функции.

§ 4.4. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ и его геометрический смысл

Пусть x — переменная величина, которая принимает положительные значения и неограниченно увеличивается. В этом случае будем говорить, что x *стремится к плюс бесконечности*, и писать $x \rightarrow +\infty$. Пусть при этом заданная функция $y = f(x)$ принимает значения, все

более и более близкие к некоторому числу b , в том смысле, что величина $|f(x) - b|$ уменьшается и приближается к нулю. В этом случае будем говорить, что число b *есть предел функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Определение. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого положительного числа ε , каким бы малым оно ни было, найдется такое положительное число N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е. символически $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N) (\forall x > N): |f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае будем писать

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Подчеркнем, что ε — любое положительное число, сколь угодно малое. Другими словами, если число b есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то для всех сколь угодно больших x значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от b . Ясно, что число N зависит от выбора числа ε : чем меньше ε , тем больше N . Иначе говоря, $N = N(\varepsilon)$, т. е. N есть функция от ε .

Покажем, что функция $f(x) = 5 + 1/x$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, равный 5. В самом деле, $f(x) - 5 = 1/x$. Так как x — величина положительная, то условие $|f(x) - 5| < \varepsilon$ примет вид $1/x < \varepsilon$, или $x > 1/\varepsilon$. Таким образом, для всех $x > 1/\varepsilon$ имеем $|f(x) - 5| < \varepsilon$, каким бы малым число ε ни было. Это означает, что функция $f(x) = 5 + 1/x$ имеет предел, равный 5, при $x \rightarrow +\infty$. В качестве числа N , фигурирующего в определении предела, можем взять $N = 1/\varepsilon$. Отсюда видно, что с уменьшением ε число N увеличивается. В этом примере $f(x) = 5 + 1/x > 5$ всегда, так как $x > 0$. Поэтому функция стремится к пределу 5, оставаясь больше своего предела, когда $x \rightarrow +\infty$.

Аналогично можно показать, что функция $2 - 1/x$ имеет предел, равный 2, и при $x \rightarrow +\infty$ эта функция $2 - 1/x < 2$ для всех x , так как $x > 0$. Таким образом, функция стремится к 2, оставаясь при этом меньше своего предела.

Нетрудно проверить, что функция $1 + \sin x/x$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет предел, равный 1. Здесь x — угол, измеряемый в радианах. Ясно, что эта функция при $x \rightarrow +\infty$ может принимать значения как большие, так и меньшие 1 в зависимости от знака $\sin x$. Эта функция стремится к своему пределу, принимая значения и меньшие, и большие, и равные этому пределу.

Но функция $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ может и не иметь предела. Например, пусть $f(x) = \sin x$. Если $x \rightarrow +\infty$, то $\sin x$ изменяется, принимая любые значения в интервале $[-1, 1]$, и ни к какому пределу не стремится.

Геометрический смысл предела функции. Неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon \tag{4.7}$$

равносильно неравенствам $-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon$, или

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \quad (4.8)$$

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что для всех $x > N$ имеет место (4.7), а следовательно, и (4.8), то геометрически это означает, что для всех точек графика $y = f(x)$, абсциссы x которых удовлетворяют неравенству $x > N$, ординаты $f(x)$ лежат в интервале (4.8). Иными словами, указанные точки, образующие соответствующий участок графика, лежат между прямыми с уравнениями $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 4.1).

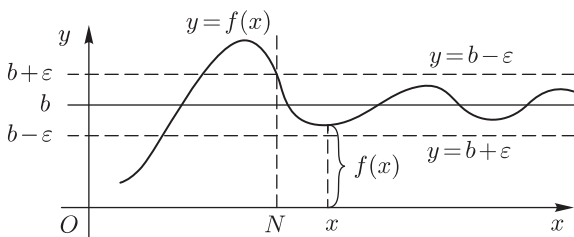


Рис. 4.1

Пусть переменная x принимает отрицательные значения, и абсолютная величина $|x|$ неограниченно возрастает. В этом случае говорят, что $x \rightarrow -\infty$. Запишем определение предела функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ символически. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если $(\forall \varepsilon > 0) (\exists M < 0) (\forall x < M): |f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Пусть x изменяется, принимая как положительные, так и отрицательные значения, абсолютная величина $|x|$ неограниченно увеличивается. Тогда говорят, что x *стремится к бесконечности*, и пишут $x \rightarrow \infty$. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое число $N > 0$, что для всех x , абсолютная величина которых $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0) (\forall |x| > N): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Можно показать, что если существует последний предел, то существуют предыдущие два предела и все три равны между собой. И наоборот, если существуют предыдущие два предела и они равны, то существует третий, равный двум предыдущим.

§ 4.5. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ и его геометрический смысл. Односторонние пределы

Пусть x_0 — заданное число. Рассмотрим предел функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ и $x < x_0$. Число b называется *пределом слева функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, каким бы малым ε ни было, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек интервала $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Сказанное можно записать символически в виде

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (x_0 - \delta < x < x_0)): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b$. Так же, как для N в § 4.4, фигурирующая в определении величина δ зависит от ε , т.е. является функцией от ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), и чем меньше ε , тем меньше δ .

По аналогии дадим определение предела функции $y = f(x)$ справа при $x \rightarrow x_0$. Число b называется *пределом справа функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x: x_0 < x < x_0 + \delta): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b$.

Эти два предела называются *односторонними пределами* функции $y = f(x)$. Теперь дадим определение двустороннего (обычного) предела функции при $x \rightarrow x_0$ (далее всегда под пределом функции при $x \rightarrow x_0$ будем иметь в виду именно этот двусторонний предел).

Число b называется (*двусторонним*) *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, каким бы малым оно ни было, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, отличных от x_0 , выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т.е.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Можно проверить, что если существует последний предел, то существуют оба предыдущих односторонних предела и все три предела равны между собой. И наоборот, если существуют оба односторонних предела и они равны друг другу, то существует двусторонний предел функции при $x \rightarrow x_0$, равный односторонним.

Выясним геометрический смысл двустороннего предела функции. Согласно определению, для всех точек интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, отличных от x_0 , выполняется соотношение (4.8). Геометрически это означает, что если абсцисса x точки графика $y = f(x)$ лежит в ин-

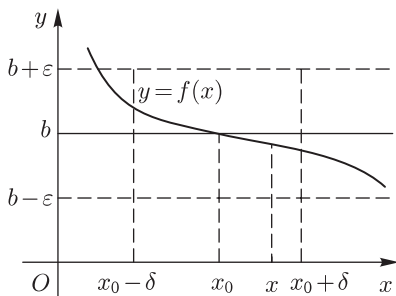


Рис. 4.2

тервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, то ордината $f(x)$ этой точки лежит в интервале (4.8) (рис. 4.2). Следовательно, указанная точка лежит между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Это относится к любой точке кривой $y = f(x)$, абсцисса которой лежит в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, причем $x \neq x_0$. Поэтому соответствующий участок графика лежит между вышеуказанными прямыми.

§ 4.6. Теоремы о пределах. Ограниченные функции

Все теоремы о пределах функции $y = f(x)$ будем доказывать для случая, когда $x \rightarrow +\infty$. В остальных случаях стремления x доказательства аналогичны.

Теорема 4.1. *Если функция имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то этот предел будет единственным.*

Доказательство. Дано, что функция $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Докажем, что никакое другое число, например, $b_1 < b$, не может быть пределом этой функции при $x \rightarrow +\infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы было $b_1 + \varepsilon < b - \varepsilon$. Так как b — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то для выбранного нами числа ε найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ значения функции $f(x)$ будут удовлетворять неравенству (4.7), а следовательно, и (4.8). Поэтому для всех $x > N$ имеем

$$b - \varepsilon < f(x). \quad (4.9)$$

Предположим, что $b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Тогда для выбранного выше числа ε найдется такое число N_1 , что для всех $x > N_1$ будет выполняться неравенство $b_1 - \varepsilon < f(x) < b_1 + \varepsilon$. Следовательно, для всех $x > N_1$ будем иметь

$$f(x) < b_1 + \varepsilon. \quad (4.10)$$

Пусть $\tilde{N}$ — наибольшее из чисел N, N_1 . Тогда для всех $x > \tilde{N}$ выполняются оба неравенства (4.9), (4.10). Из них получим, что $b_1 + \varepsilon > b - \varepsilon$. Но это противоречит условию $b_1 + \varepsilon < b - \varepsilon$, поэтому сделанное предположение должно быть отброшено.

Функция называется *ограниченной* на некотором множестве M значений x , если существует такое положительное число C , что для всех x из множества M выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$.

Например, функция $\sin x$ является ограниченной на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$, так как для всех x имеем $|\sin x| \leq 1$. В то же время функция $1/x$ не является ограниченной в интервале $0 < x < 1$. В самом деле, с уменьшением x , т. е. с приближением x к нулю, в этом интервале функция $1/x$ неограниченно увеличивается, и не существует такого положительного числа C , чтобы выполнялось неравенство $|1/x| < C$ в интервале $(0, 1)$.

Теорема 4.2. Если функция $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет предел, то эта функция является ограниченной в некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.

Доказательство. Дано, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Для числа $\varepsilon = 1$ (как и для любого $\varepsilon > 0$) найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < 1$. Согласно свойству абсолютной величины $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b|$. Поэтому для всех $x > N$ имеет место $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < 1$. Итак, для $x > N$ имеем $|f(x)| - |b| < 1$, следовательно, для всех $x > N$ будем иметь $|f(x)| < |b| + 1$. Это означает, что функция $f(x)$ ограничена в интервале $(N, +\infty)$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. Если при $x \rightarrow +\infty$ функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, b \neq 0$, то функция $1/f(x)$ ограничена в некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.

Теорема доказывается аналогично предыдущей.

§ 4.7. Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow +\infty$, если ее предел равен нулю, т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Здесь предел $b = 0$, поэтому $|f(x) - b| = |f(x)|$. С учетом определения предела функции можно дать следующее определение бесконечно малой функции: функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, если для любого заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| < \varepsilon$, или символически

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0) (\forall x > N): |f(x)| < \varepsilon.$$

Например, функция $1/x$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$. В самом деле, здесь неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ запишется так: $|1/x| < \varepsilon$, или $1/x < \varepsilon$, т. е. $x > 1/\varepsilon$. Итак, для всех $x > 1/\varepsilon$ имеем $|1/x| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Это означает, что $1/x$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$, и в качестве числа N , фигурирующего в определении, можно взять $N = 1/\varepsilon$.

При других способах изменения x определение бесконечно малой функции будет аналогичным (с учетом определения предела). Например, функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ (x_0 — заданное число), если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0): |f(x)| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малой функции.

Теорема 4.4. Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$, то их сумма $\varphi(x) + \psi(x)$ также является бесконечно малой функцией, при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Нужно доказать, что для этого числа найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x) + \psi(x)| < \varepsilon$.

Для указанного числа ε возьмем число $\varepsilon/2$. Так как $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией, то для числа $\varepsilon/2$ найдется такое число $N_1 > 0$, что для всех $x > N_1$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x)| < \varepsilon/2. \quad (4.11)$$

Так как $\psi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$, то найдется такое число $N_2 > 0$, что для всех $x > N_2$ будет выполняться неравенство

$$|\psi(x)| < \varepsilon/2. \quad (4.12)$$

Пусть N — наибольшее из чисел N_1, N_2 . Тогда для $x > N$ имеют место оба неравенства (4.11), (4.12). Поэтому с учетом свойства абсолютной величины суммы имеем для всех $x > N$

$$|\varphi(x) + \psi(x)| \leq |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Если $\psi(x)$ — бесконечно малая функция, то $-\psi(x)$ тоже является бесконечно малой функцией. Это ясно из определения, так как $|-\psi(x)| = |\psi(x)|$. Ясно также, что разность двух бесконечно малых функций есть снова бесконечно малая функция, так как разность можно записать в виде суммы: $\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(x) + (-\psi(x))$.

Доказанная теорема сразу распространяется на любое конечное число слагаемых бесконечно малых функций. Можно сказать, что

алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.

Теорема 4.5. Если $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$, а $f(x)$ — ограниченная функция в некотором бесконечном интервале $(N_1, +\infty)$, то произведение $\varphi(x)f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Нужно доказать, что для этого числа найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x)f(x)| < \varepsilon$. Это будет означать, что рассматриваемое произведение есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Так как $f(x)$ — ограниченная функция в интервале $(N_1, +\infty)$, то существует такое число $c > 0$, что для всех точек интервала $(N_1, +\infty)$, т. е. для всех $x > N_1$, имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq c. \quad (4.13)$$

Так как $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow +\infty$, то для числа ε/c найдется такое число $N_2 > 0$, что для всех $x > N_2$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x)| < \varepsilon/c. \quad (4.14)$$

Пусть N — наибольшее из чисел N_1, N_2 . Тогда для всех $x > N$ неравенства (4.13) и (4.14) выполняются одновременно, поэтому с учетом свойства абсолютной величины произведения для всех $x > N$ имеем

$$|\varphi(x)f(x)| = |\varphi(x)| |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствия из теорем 4.2–4.5.

Следствие 4.1. Функция, бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$, является функцией, ограниченной в некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$ (согласно теореме 4.2, поскольку указанная бесконечно малая функция имеет предел, равный нулю, при $x \rightarrow +\infty$).

Следствие 4.2. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция (согласно теореме 4.5, так как любая из этих бесконечно малых функций — функция ограниченная).

Следствие 4.3. Произведение постоянной на бесконечно малую функцию — функция бесконечно малая (согласно теореме 4.5, так как постоянная есть ограниченная функция).

§ 4.8. Бесконечно большая функция, ее связь с бесконечно малой

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow +\infty$, если для любого числа $L > 0$, каким бы большим это число ни было, найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| > L$. Например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$. В самом деле, здесь $|f(x)| > L$ запишется как $|x^2| > L$ или, так как $x^2 > 0$, в виде $x^2 > L$, а для положительных x в виде $x > \sqrt{L}$. Поэтому для всех $x > \sqrt{L}$ имеет место неравенство $|x^2| > L$, каким бы большим число $L > 0$ ни было. Ясно, что x^2 — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$, и в качестве числа N , указанного в определении, можно взять $\sqrt{L}$.

Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$, то пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и говорят, что *функция $f(x)$ стремится к бесконечности*.

Если функция $f(x)$ принимает только положительные значения, пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Если функция $f(x)$ принимает только отрицательные значения, то пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

В последних двух случаях говорят, что функция $f(x)$ стремится к плюс бесконечности, минус бесконечности соответственно, но знаки ∞ , $+\infty$, $-\infty$ не являются числами и над ними нельзя проводить операции: нельзя писать $\infty - \infty = 0$ или $\infty/\infty = 1$. Эти символы лишь обозначения пределов бесконечно большой функции.

Связь между бесконечно большой и бесконечно малой функциями.

Теорема 4.6. Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$, то $1/f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Докажем, что для него найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|1/f(x)| < \varepsilon$. Это и будет означать, что $1/f(x)$ — бесконечно малая функция. Для указанного числа $\varepsilon > 0$ возьмем $1/\varepsilon$. Так как $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$, то для числа $1/\varepsilon$ найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| > 1/\varepsilon$, а отсюда для всех $x > N$ имеем

$$\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon. \quad (4.15)$$

Согласно свойству абсолютной величины дроби $|1/f(x)| = 1/|f(x)|$. Теперь неравенство (4.15) для всех $x > N$ можно записать так: $|1/f(x)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 4.7 (обратная теореме 4.6). Если $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$, не обращающаяся в нуль, то $1/\varphi(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Теоремы 4.6 и 4.7 условно записывают так: $1/\infty = 0$ и $1/0 = \infty$. Отметим, что при других способах изменения x определение бесконечно большой функции дается аналогично, например, функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если

$$(\forall L > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0): |f(x)| > L.$$

При этом говорят также, что функция имеет *бесконечный предел*.

§ 4.9. Свойства пределов

Теорема 4.8. Если $f(x)$ — функция, имеющая при $x \rightarrow +\infty$ предел, равный числу b , то эту функцию можно представить в виде суммы числа b и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $f(x) = b + \alpha(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Обозначим

$$f(x) - b = \alpha(x) \quad (4.16)$$

и покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция. Так как $f(x)$ имеет предел равный b , то согласно определению предела для указанного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, или с учетом введенного выше обозначения $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Итак, для всех $x > N$ имеем $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция, и мы получаем из (4.16) $f(x) = b + \alpha(x)$. Теорема доказана.

Теорема 4.9 (обратная теореме 4.8). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа b и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то число b есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема доказывается аналогично теореме 4.8.

Теорема 4.10. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых функций, если последние пределы существуют.

Например, для двух функций

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Теорема 4.11. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если последние пределы существуют.*

Например, для двух функций

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x). \quad (4.17)$$

Теорема 4.12. *Предел дроби (частного) равен отношению предела числителя к пределу знаменателя, если оба последних предела существуют и предел знаменателя не равен нулю.*

Эти три теоремы доказываются аналогичным образом. Докажем теорему 4.11. Нам дано, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = c \quad (4.18)$$

(b, c — некоторые числа). Тогда по теореме 4.8 $f(x) = b + \alpha(x)$, $\varphi(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$. Запишем произведение $f(x)\varphi(x) = bc + [b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)]$. Слагаемые в квадратных скобках — бесконечно малые функции, согласно следствиям из теорем 4.2 — 4.5. Тогда сумма в этих скобках, согласно теореме 4.4, — тоже бесконечно малая функция, поэтому число bc , согласно теореме 4.9, есть предел функции $f(x) \cdot \varphi(x)$. Итак, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = b \cdot c$. Подставив в правую часть вместо b и c пределы (4.18), приходим к формуле (4.17). Теорема доказана.

Следствие из теоремы 4.11. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [A\varphi(x)] = A \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \quad A = \text{const}.$$

В самом деле, если $f(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A = A$ (поскольку предел постоянной равен этой же постоянной, что ясно из определения предела). По формуле (4.16) получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = A \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

§ 4.10. Переход к пределу в неравенствах

Теорема 4.13. *Пусть $\varphi(x) < f(x) < g(x)$ для всех x и функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеют один и тот же предел, равный b . Тогда тот же предел b при $x \rightarrow +\infty$ имеет функция $f(x)$, заключенная между $g(x)$ и $\varphi(x)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Так как $\varphi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет предел, равный b , то для числа

$\varepsilon > 0$ найдется число N_1 , такое, что для всех $x > N_1$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$. Аналогично, так как $g(x)$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ предел, равный b , то для указанного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_2 , что для всех $x > N_2$ будет выполняться неравенство $|g(x) - b| < \varepsilon$. Пусть N — наибольшее из чисел N_1 и N_2 . Тогда для всех $x > N$ выполняются оба предыдущих неравенства. Значит, для всех $x > N$ имеют место следующие неравенства, равносильные соответствующим предыдущим: $b - \varepsilon < \varphi(x) < b + \varepsilon$, $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Поэтому для всех $x > N$ с учетом условия теоремы будем иметь $b - \varepsilon < \varphi(x) < f(x)$, $f(x) < g(x) < b + \varepsilon$. Отсюда $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ для всех $x > N$, т.е. справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, равносильное последнему.

Итак, для всех $x > N$ имеем $|f(x) - b| < \varepsilon$, но это означает, что b есть предел $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Легко проверить, что заключение теоремы остается справедливым и в том случае, когда $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ для всех x .

Теорема 4.14. *Если для всех x функция $f(x) > 0$ и существует предел этой функции при $x \rightarrow +\infty$, то этот предел неотрицателен: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq 0$.*

Доказательство. Дано, что существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, который мы обозначим b . Нужно доказать, что $b \geq 0$.

Предположим обратное, т.е. что $b < 0$ (хотя все условия теоремы выполняются). Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы было $b + \varepsilon < 0$. Так как функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ предел, равный b , то для выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или равносильное ему неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поэтому для всех $x > N$ получим $f(x) < b + \varepsilon < 0$. Итак, для всех $x > N$ будем иметь $f(x) < 0$. Но это противоречит условию теоремы; следовательно, предположение, что $b < 0$, должно быть отброшено. Теорема доказана.

Легко проверить, что заключение теоремы остается справедливым, когда $f(x) \geq 0$ для всех x .

§ 4.11. Первый замечательный предел

Докажем равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Возьмем круг единичного радиуса. Пусть x есть угол между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$, измеренный в радианах (рис. 4.3). Будем считать угол x положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки от вектора $\overrightarrow{OC}$, и отрицательным, если отсчет ведется в противополож-

ном направлении. Будем считать пока $0 < x < \pi/2$. Из рис. 4.3 видно, что $OB = \cos x$, $BA = \sin x$, $CD = \operatorname{tg} x$, а также что $OB = \cos x \rightarrow 1$ и $BA = \sin x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Это верно и при $x < 0$. Площади треугольников и кругового сектора, указанных на рис. 4.3, связаны соотношением $S_{\triangle OBA} < S_{\text{сект. } OCA} < S_{\triangle OCD}$, которое принимает вид $(\sin x \cos x)/2 < x/2 < (\operatorname{tg} x)/2$, или (после умножения на положительное число $2/\sin x$) $\cos x < x/\sin x < 1/\cos x$. В последнем неравенстве перейдем к обратным величинам, при этом знаки неравенства изменятся на обратные:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (4.19)$$

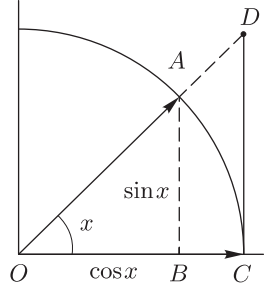


Рис. 4.3

Последнее неравенство получено для $x > 0$. Пусть теперь $x < 0$. Тогда $-x > 0$ и справедлива формула (4.19) с заменой x на $-x$, т. е. $1/\cos(-x) < \sin(-x)/(-x) < \cos(-x)$. Учитывая, что $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$, опять приходим к неравенству (4.19), но уже для $x < 0$.

Итак, неравенство (4.19) справедливо как для $x > 0$, так и для $x < 0$. Перейдем в нем к пределу при $x \rightarrow 0$ (к обычному пределу, когда $x \rightarrow 0$, принимая как положительные, так и отрицательные значения). Однако крайние части (4.19) имеют один и тот же предел, равный 1. Поэтому по теореме 4.13 получим предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$, который назовут *первым замечательным пределом*.

Пример.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \right) = \\ &= 3 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (3x \rightarrow 0)}} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (3x \rightarrow 0)}} \frac{1}{\cos 3x} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

§ 4.12. Предел последовательности. Второй замечательный предел. Натуральные логарифмы

Дана функция $y_n = f(n)$, где n принимает целые положительные значения. Она называется *функцией натурального аргумента* n и принимает значения $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, ..., $y_n = f(n)$, ... Последние образуют последовательность чисел $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Эту последовательность коротко записывают $\{y_n\}$. Таким образом, задание функции натурального аргумента равносильно заданию последовательности.

По аналогии с определением предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ дадим определение предела функции натурального аргумента (последовательности).

Число b называется *пределом функции натурального аргумента* $y_n = f(n)$ при $n \rightarrow \infty$, или *последовательности* $\{y_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, каким бы малым оно ни было, найдется такое натуральное число N , что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|f(n) - b| < \varepsilon$ или $|y_n - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Функция натурального аргумента $y_n = f(n)$ (последовательность $\{y_n\}$) называется *возрастающей*, если $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$ или *убывающей*, если $y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$. Рассматриваемая функция (последовательность) будет ограниченной, если существует такое положительное число c , что для всех n выполняется неравенство $|y_n| \leq c$. Например, функция $y_n = f(n) = 1/n$ или последовательность $\{1/n\}$ является убывающей. В самом деле, каждое последующее значение меньше предыдущего, т.е. $1 > 1/2 > 1/3 > \dots$. Кроме того, последовательность является ограниченной, так как для всех n выполняется неравенство $1/n \leq 1$.

Без доказательства приведем несколько теорем.

Теорема 4.15. *Всякая возрастающая ограниченная последовательность (функция натурального аргумента) имеет конечный предел.*

Эта теорема утверждает только лишь существование предела, но не указывает, как его найти.

Теорема 4.16. *Функция натурального аргумента $y_n = (1 + 1/n)^n$ имеет при $n \rightarrow \infty$ предел, заключенный между числами 2 и 3.*

При доказательстве этой теоремы сначала устанавливают, что эта функция является возрастающей и ограниченной. Поэтому согласно теореме 4.15 предел функции существует. Его обозначают через e и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Можно показать (принимается без доказательства), что число e является иррациональным. Его приближенное значение $e \approx 2,718\,282$.

Теорема 4.17. *Функция $y = (1 + 1/x)^x$ при $x \rightarrow \infty$ имеет предел, равный e :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4.20)$$

Предел (4.20) называют *вторым замечательным пределом*.

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1+3}{x+1} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)^{\left(\frac{x+1}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot 3}.$$

Пусть $(x+1)/3 = y$, при этом $y \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow \infty$. Тогда последний предел примет вид

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^{3y} \left(1 + \frac{1}{y} \right) \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^3 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right) = e^3 \cdot 1 = e^3.$$

Логарифм $\log_a x$ называется *натуральным*, если его основание равно e , т. е. $a = e$. Этот логарифм обозначают $\ln x$. Очевидно, $\ln e = 1$.

Пусть $y = \ln x$. Тогда по определению логарифма $e^y = x$. От последнего соотношения возьмем десятичный логарифм и получим $\lg e^y = \lg x$. По свойству логарифма будем иметь $y \lg e = \lg x$. Но $y = \ln x$, следовательно,

$$\ln x \cdot \lg e = \lg x. \quad (4.21)$$

В этой формуле $\lg e$ — известное число (так как e — число известное, то и его десятичный логарифм известен: $\lg e \approx 0,4343$), поэтому формула (4.21) выражает десятичный логарифм x через его натуральный логарифм. Ясно, что и, наоборот, по $\lg x$ можно найти $\ln x = \lg x / \lg e$.

§ 4.13. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$, т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$. Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией одного порядка с бесконечно малой функцией $\psi(x)$* , если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)/\psi(x)] \neq 0$.

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\psi(x)$* , если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)/\psi(x)] = 0$. Значит, проще говоря, $\varphi(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\psi(x)$.

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией более низкого порядка, чем $\psi(x)$* , если $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)/\psi(x)] = \infty$, т. е. упрощенно, $\varphi(x)$ стремится к нулю медленнее, чем $\psi(x)$.

Если конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)/\psi(x)]$ не существует, то говорят, что *бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не сравнимы по отношению*.

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией порядка k* (k — определенное число) по отношению к бесконечно малой функции $\psi(x)$, если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^k} \neq 0.$$

Например, функция $\varphi(x) = 1/x^2$ есть бесконечно малая функция второго порядка по отношению к бесконечно малой функции $\psi(x) = 1/x$ при $x \rightarrow +\infty$. В самом деле, здесь имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{[1/x]^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Отметим, что две бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одного порядка называются *эквивалентными* при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)/\psi(x)] = 1$.

Пример. При $x \rightarrow \infty$ бесконечно малые функции $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{x^4}$ и $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$ эквивалентные, так как предел их отношения равен единице. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+3)/x^4}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = 1.$$

§ 4.14. Непрерывность функции в точке и в интервале

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке $x = c$* , если

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (4.22)$$

Это означает, что:

- существует $f(c)$, т.е. функция $f(x)$ определена в точке $x = c$ и всюду вблизи точки $x = c$;
- существует предел $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (существуют равные друг другу односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$);
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c)$).

Как видно из (4.22), предел непрерывной функции можно вычислить подстановкой в функцию предельного значения $x = c$ ее аргумента. Кроме того, $x \rightarrow c$ можно записать так: $\lim_{x \rightarrow c} x = c$. Этот предел подставим в правую часть формулы (4.22) и получим $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x)$. Это равенство показывает, что знак предела и обозначение непрерывной функции можно переставить.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке открытого интервала (a, b) или замкнутого интервала $[a, b]$, то ее называют *непрерывной в соответствующем интервале*. Ясно, что для замкнутого интервала соотношение (4.22) считаем выполненным во всех точках этого интервала, включая концы, т. е. в частности $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$. Здесь предел в точке a представляет собой предел справа, так как слева от этой точки функция не определена. Аналогично в точке b имеем предел слева, так как справа от точки b функция не определена. Геометрический смысл непрерывности функции заключается в том, что ее график представляет собой сплошную, без разрывов, линию. В самом деле, изобразим на плоскости Oxy график непрерывной функции $y = f(x)$ (рис. 4.4). На кривой отметим точку M_0 с абсциссой c , ее ордината равна $f(c)$, т. е. $M_0(c, f(c))$. На этой же кривой возьмем точку M с абсциссой x , ее ордината равна $f(x)$, т. е. $M(x, f(x))$. Когда абсцисса x точки M стремится к абсциссе c точки M_0 , ордината $f(x)$ точки M стремится к $f(c)$ согласно (4.22) в силу непрерывности функции. Это означает, что при этом точка M стремится к точке M_0 , и графиком функции $y = f(x)$ является сплошная линия без разрывов.

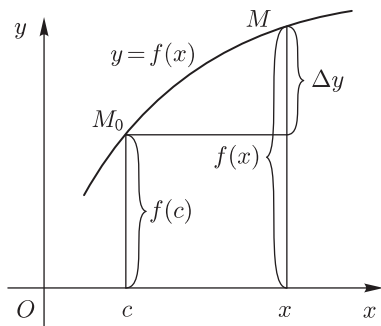


Рис. 4.4

Обозначим величину $x - c = \Delta x$ и назовем ее *приращением аргумента* рассматриваемой функции $f(x)$. Разность соответствующих значений функции обозначим

$$f(x) - f(c) = \Delta y, \quad (4.23)$$

или, так как $x = c + \Delta x$, $f(c + \Delta x) - f(c) = \Delta y$, и назовем *приращением функции $f(x)$, вычисленным для точки c и соответствующим приращению Δx аргумента*.

В (4.22) учтем, что $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(c)$, так как предел постоянной равен этой постоянной. Этот предел подставим в правую часть (4.22), затем перенесем его влево и учтем, что разность пределов равна пределу разности. После этого получим $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = 0$. Но разность под знаком предела, согласно (4.23), равна Δy . Поэтому имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (4.24)$$

Здесь мы учли, что при $x \rightarrow c$ разность $\Delta x \rightarrow 0$. Таким образом, если функция непрерывна в точке c , то при стремлении приращения аргумента Δx к нулю соответствующее приращение функции, вычисленное для точки c , стремится к нулю. Проведя рассуждения в обратном порядке, получим, что из (4.18) следует (4.16).

Соотношение (4.18) иногда называют *вторым определением непрерывности функции в точке*. Оно равносильно исходному определению (4.16).

§ 4.15. Свойства непрерывных функций

Теорема 4.18. *Алгебраическая сумма конечного числа функций, непрерывных в точке, есть функция, непрерывная в этой точке.*

Теорема 4.19. *Произведение конечного числа функций, непрерывных в точке, есть функция, непрерывная в этой точке.*

Теорема 4.20. *Частное от деления двух функций, непрерывных в точке, есть функция, непрерывная в этой точке, если знаменатель в ней не обращается в нуль.*

Эти теоремы доказываются, исходя из определения непрерывности функции (4.22), с привлечением ранее доказанных теорем о пределах суммы, произведения и частного. На этом не останавливаемся.

Теорема 4.21. *Сложная функция, состоящая из непрерывных функций, есть непрерывная функция.*

Доказательство. Теорему докажем для сложной функции, состоящей из двух функций. В случае большего числа образующих функций теорема доказывается аналогично.

Пусть дана функция $y = f(U)$, в которой U , в свою очередь, является функцией от x ($U = \varphi(x)$), т. е. дана сложная функция

$$y = [f(\varphi(x))] = F(x). \quad (4.25)$$

Пусть значению аргумента $x = c$ отвечает значение $U = p$ функции $U = \varphi(x)$, т. е. $p = \varphi(c)$. Кроме того, известно, что функция $y = f(U)$ непрерывна в точке p , т. е. согласно (4.22)

$$\lim_{U \rightarrow p} f(U) = f(p). \quad (4.26)$$

Дано также, что функция $U = \varphi(x)$ непрерывна в точке c , соответствующей точке p , т. е. $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \varphi(c)$. Последняя формула показывает, что при $x \rightarrow c$ имеем $\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$, а так как $U = \varphi(x)$, $p = \varphi(c)$, то $U \rightarrow p$. Нужно доказать, что сложная функция (4.25) непрерывна

в точке c , т. е. нужно показать, что $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$. Действительно, с учетом (4.25) имеем

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} [f(\varphi(x))] = \lim_{U \rightarrow p} [f(U)] = f(p) = f[\varphi(c)] = F(c).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.22. *Всякая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Эта теорема принимается без доказательства.

Из теорем 4.18–4.22 и определения элементарной функции вытекает, что элементарные функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены. Отсюда в соответствии с (4.22) следует, что предел элементарной функции можно вычислить подстановкой предельного значения аргумента. Например, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin^2 x) = \sin^2(\pi/2) = 1$.

§ 4.16. Точки разрыва функции

Точка $x = c$ называется *точкой разрыва функции* $y = f(x)$, если в ней нарушается хотя бы одно из трех условий непрерывности функции в точке, указанных в § 4.14.

В качестве примера возьмем функцию, определенную формулой

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (4.27)$$

Ясно, что эта функция определена везде, кроме точки $x = 0$. Для любого положительного x имеем $|x| = x$ и согласно формуле (4.27) $f(x) = 1$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и $f(x) = -1$. График этой функции изображен на рис. 4.5. Так как функция в точке $x = 0$ не определена, то на ее графике нет точки с абсциссой $x = 0$, т. е. точки, лежащей на оси Oy , поэтому график как бы не доходит до оси Oy , что отмечено стрелками. Для любой точки $x = c > 0$ имеем $f(c) = 1$. Кроме того, для любого $x > 0$ имеем $f(x) = 1$, поэтому $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = 1$. Это означает, что функция в точке c непрерывна в силу (4.22). Аналогично установим, что для любого $x = c < 0$ функция также непрерывна. Но точка $x = 0$ есть точка разрыва функции (4.27) по двум причинам:

- не существует $f(0)$, так как в точке $x = 0$ функция (4.27) не определена;
- для функции (4.27) не существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

В самом деле, предел справа этой функции $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$, а предел слева $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$. Таким образом, односторонние пределы хотя и существуют, но не равны друг другу, значит, не существует обыч-

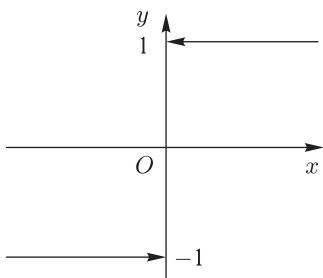


Рис. 4.5

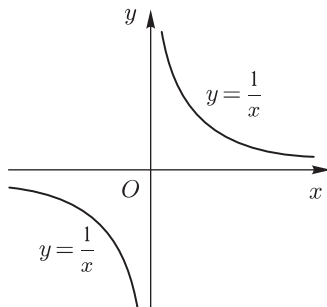


Рис. 4.6

ный (двусторонний) предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Точка $x = c$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$. Например, для функции (4.27) точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода.

Все остальные точки разрыва называются *точками разрыва второго рода*. Для функции $f(x) = 1/x$ (рис. 4.6) точкой разрыва второго рода будет $x = 0$, так как в этой точке функция не определена и односторонние пределы бесконечны: $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$.

Глава 5

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5.1. Задача об определении скорости

Пусть точка движется по прямой (вообще говоря, неравномерно) и проходит путь от точки M_0 до точки M длиной S за время t (рис. 5.1). С изменением t длина пути S изменяется по заданному

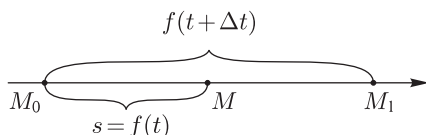


Рис. 5.1

закону $S = f(t)$ (т.е. функцию $S = f(t)$ считаем заданной). Итак, $M_0M = S = f(t)$. В следующий момент времени $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$, точка окажется в положении M_1 . Таким образом, за время $t + \Delta t$ точка пройдет путь, равный $f(t + \Delta t)$ (получаемый из формулы $S = f(t)$ заменой t на $t + \Delta t$). Это означает, что за время Δt точка проходит путь

$$MM_1 = f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta S. \quad (5.1)$$

Путь MM_1 равен приращению функции $S = f(t)$, которое соответствует приращению Δt и вычисляется для точки t . Ясно, что отношение $\Delta S / \Delta t$ характеризует скорость передвижения точки на участке MM_1 за время Δt . Чем быстрее точка движется, тем больший путь она пройдет за время Δt , тем больше будет значение этого отношения. Нас интересует скорость движения точки не на всем участке MM_1 (не за весь промежуток времени Δt), а скорость движения точки в положении M (в момент t).

Очевидно, что чем меньше Δt , тем точнее отношение $\Delta S / \Delta t$ характеризует скорость движения точки в момент t . Эту скорость наибо-

лее полно характеризует предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta S / \Delta t)$, который обозначается $V = V(t)$. Итак,

$$V = V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

или с учетом (5.1):

$$V = V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

§ 5.2. Определение, механический и геометрический смыслы производной

Дана функция $y = f(x)$. Приращению Δx аргумента этой функции отвечает ее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, записанное для точки x . Возьмем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ называется *производной функции $y = f(x)$ в точке x* и обозначается $f'(x)$. Итак,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (5.3)$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.4)$$

Например, для функции $f(x) = x^2$ имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} = 2x.$$

Понятно, что в каждой точке x эта производная будет своя, поэтому производная $f'(x)$ также является функцией от x . Для обозначения производной применяются также символы y' , y'_x , dy/dx . Значение производной в конкретной точке $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$. Отметим, что операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

При прямолинейном движении точки по закону $S = f(t)$ скорость точки в момент t определяется формулой (5.2):

$$V = V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Сравнив ее с формулами (5.3), (5.4), заключаем, что в правой части (5.2) стоит выражение, равное $f'(t) = S'_t$. Итак, скорость V точки в момент t равна производной от пути S по времени t . В этом состоит *механический смысл производной*.

Геометрический смысл производной. Пусть дана функция $y = f(x)$. Изобразим ее график на плоскости Oxy и возьмем на кривой $y = f(x)$ точки $M_0(x, f(x))$ и $M_1(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ (на рис. 5.2 пока-

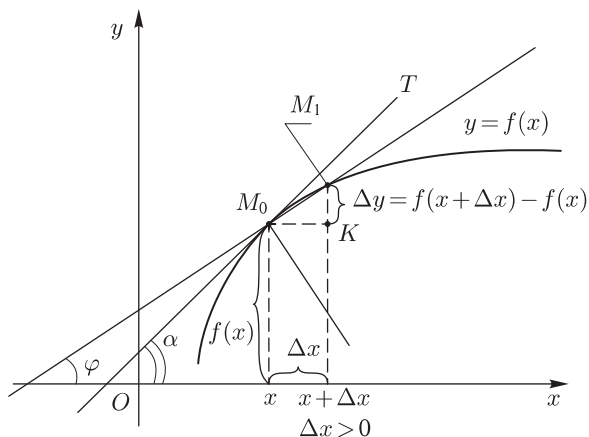


Рис. 5.2

зан случай, когда $\Delta x > 0$ и $x + \Delta x > x$, а если $\Delta x < 0$, то точка M_1 будет лежать левее точки M_0). Через точки M_0, M_1 проведем секущую, которая образует с осью Ox угол φ . Пусть K — точка с абсциссой $x + \Delta x$ и ординатой $f(x)$. Из рис. 5.2 видно, что для треугольника M_0KM_1 справедливо соотношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (5.5)$$

Если при стремлении точки M_1 к точке M_0 с любой стороны секущая M_0M_1 стремится к определенному положению M_0T , то эта прямая M_0T называется *касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке M_0* . Пусть α — угол, образованный этой касательной с осью Ox , тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ точка M_1 стремится к M_0 , M_0M_1 стремится к M_0T и угол φ стремится к углу α . Так как $\operatorname{tg} \varphi$ — непрерывная функция, то $\lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$. Перейдем в (5.5) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi$.

Предел в правой части последней формулы равен $\operatorname{tg} \alpha$, а предел в левой ее части согласно (5.3) равен $f'(x)$, поэтому $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

Итак, вычисленная в точке x производная от функции $y = f(x)$ равна $\operatorname{tg} \alpha$, причем угол α образован с осью Ox касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке M_0 с абсциссой x . В этом заключается *геометрический смысл производной*. Иначе говоря, эта производная равна угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg} \alpha$ касательной.

§ 5.3. Касательная и нормаль к кривой. Существование производной

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка кривой $y = f(x)$, т. е. x_0 и $y_0 = f(x_0)$ — известные числа. Найдем производную $f'(x)$ и вычислим $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0 . Зная координаты точки M_0 и угловой коэффициент касательной, запишем уравнение касательной M_0T (по формуле (2.31)):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке M_0* . В силу перпендикулярности нормали и касательной угловой коэффициент этой нормали (§ 2.2) равен $-1/f'(x_0)$, поэтому уравнение нормали запишется так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Например, запишем уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2$ в ее точке $M_0(1, 1)$: $y - 1 = 2(x - 1)$ и $y - 1 = (-1/2)(x - 1)$ соответственно, учитывая, что $f'(1) = 2$.

Если при стремлении M_1 к M_0 с одной стороны (для $\Delta x > 0$) секущая M_0M_1 стремится к одному положению, а при стремлении M_1 к M_0 с другой стороны (для $\Delta x < 0$) эта секущая стремится к другому положению, то в точке M_0 касательная к данной кривой не существует. Ясно, что кривая $y = f(x)$ в этом случае в точке M_0 имеет излом. При этом в точке M_0 не существует производная $f'(x)$, вычисляемая по формуле (5.3).

В самом деле, при $\Delta x \rightarrow 0$, когда $\Delta x > 0$, отношение $\Delta y/\Delta x$ стремится к одному пределу, а при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x < 0$, это отношение стремится к другому пределу, т. е. это отношение имеет разные односторонние пределы при $\Delta x \rightarrow 0$. Это означает, что обычный двусторонний предел (5.3) не существует, т. е. в точке M_0 с абсциссой x не существует производная $f'(x)$. Последние рассуждения проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть функция $y = f(x)$ определена формулой

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

и имеет график, показанный на рис. 5.3. В качестве точки M_0 возьмем начало координат O . Тогда $x = 0$, $x + \Delta x = \Delta x$, $f(x) = f(0) = 0$, $f(x + \Delta x) = f(\Delta x)$. Здесь имеем

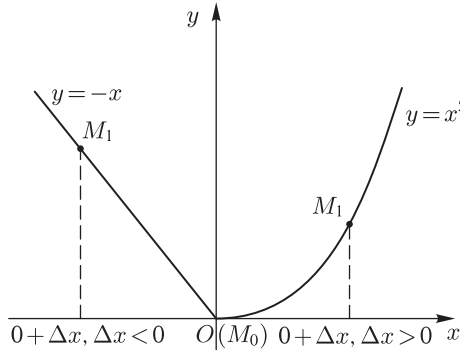


Рис. 5.3

$$f(\Delta x) = \begin{cases} -\Delta x & \text{при } \Delta x < 0, \\ (\Delta x)^2 & \text{при } \Delta x \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 & \text{при } \Delta x < 0, \\ \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \Delta x & \text{при } \Delta x \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, предел слева (когда $\Delta x < 0$) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} (\Delta y / \Delta x) = -1$, а предел справа (когда $\Delta x > 0$) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} (\Delta y / \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} (\Delta x) = 0$. Эти односторонние пределы не равны, следовательно, не существует двусторонний предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x)$. Это означает, что не существует производная $f'(x)|_{x=0}$.

Для графика рассматриваемой функции секущая $M_0 M_1$ при $M_1 \rightarrow M_0$ с разных сторон (для $\Delta x < 0$ и для $\Delta x > 0$ соответственно) стремится к разным положениям (Ox при $\Delta x > 0$, $M_0 M_1$ при $\Delta x < 0$), в точке $O(M_0)$ график имеет излом.

§ 5.4. Дифференцируемость функции

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке $x = x_0$* , если в этой точке она имеет производную $f'(x)$, иначе говоря, если существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (5.6)$$

здесь

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (5.7)$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала, то ее называют *дифференцируемой в этом интервале*.

Теорема 5.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Приращение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, соответствующее приращению Δx и определяемое формулой (5.7), запишем так: $\Delta y = (\Delta y / \Delta x) \Delta x$. В этом соотношении перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, при этом учтем, что предел правой части равен произведению пределов сомножителей: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$. В правой части первый предел, согласно (5.6), существует и равен $f'(x_0)$ (в силу условий теоремы, так как функция в точке x_0 дифференцируема). Поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$. Но $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$, значит, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Согласно второму определению непрерывности функции в точке это означает, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна. Теорема доказана.

Отметим, что утверждение, обратное утверждению теоремы, не справедливо, т. е. нельзя утверждать следующее: если функция непрерывна в точке, то она дифференцируема в этой точке. Сказанное продемонстрируем на примере функции $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Она непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как является основной элементарной функцией (степенной функцией), и в точке $x_0 = 0$ определена (равна нулю). Производная $f'(x)$ этой функции, как будет показано ниже, равна $x^{-2/3}/3$. Но эта производная в точке $x_0 = 0$ не существует, т. е. функция в этой точке не дифференцируема, хотя и непрерывна.

§ 5.5. Производная постоянной. Правила дифференцирования

Здесь при доказательстве теорем будем исходить из определения производной, согласно которому производная функции $y = f(x)$ выражается формулой

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.8)$$

Теорема 5.2. *Производная постоянной равна нулю, т. е. если $y = f(x) = \text{const}$, то $y' = 0$ или коротко $c' = 0$.*

Доказательство. Для этой функции согласно (5.8) имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3. Если $U(x)$ и $V(x)$ — дифференцируемые функции, то:

$$(a) (U + V)' = U' + V', \quad (U - V)' = U' - V';$$

$$(б) (U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$(в) \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Доказательство. Докажем лишь последнее утверждение (в) (утверждения (а) и (б) доказываются аналогично).

По формуле (5.8), в которой вместо $f(x)$ нужно взять $U(x)/V(x)$, имеем

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{U(x + \Delta x)}{V(x + \Delta x)} - \frac{U(x)}{V(x)}}{\Delta x}. \quad (5.9)$$

Разности $U(x + \Delta x) - U(x) = \Delta U$, $V(x + \Delta x) - V(x) = \Delta V$ — это соответственно приращения функций $U(x)$ и $V(x)$. Отсюда находим $U(x + \Delta x) = \Delta U + U(x)$, $V(x + \Delta x) = \Delta V + V(x)$. Эти суммы подставим в (5.9) и получим

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta U + U(x)}{\Delta V + V(x)} - \frac{U(x)}{V(x)}}{\Delta x}. \quad (5.10)$$

Выражение в числителе правой части этой формулы приведем к общему знаменателю и представим ее в виде

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V^2 + V \Delta V}. \quad (5.11)$$

Предел правой части формулы (5.11) равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя. Но предел числителя равен разности пределов, так как там стоит предел разности. Предел знаменателя равен сумме пределов слагаемых, но здесь пределы берутся при $\Delta x \rightarrow 0$, когда x , а следовательно, и $U(x)$, $V(x)$ не изменяются, т. е. являются постоянными, и эти множители выносятся за знак предела. Поэтому (5.11) примет вид

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{V \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V^2 + V \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta V}. \quad (5.12)$$

Так как $U(x)$, $V(x)$ — дифференцируемые функции, то существуют пределы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta U / \Delta x) = U'$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta V / \Delta x) = V'$. Кроме того, по условию теоремы $V(x)$ — дифференцируемая функция, значит, она непрерывна, поэтому согласно второму определению непрерывной функции $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta V = 0$. Подставив последние три предела в (5.12), получим формулу (в). Теорема доказана.

Следствие из утверждения (б). Если c — постоянная, $V = V(x)$ — дифференцируемая функция, то $(cV)' = cV'$.

В самом деле, когда $U = c = \text{const}$, имеем $U' = c' = 0$, и формула (б) теоремы 5.2 дает $(c \cdot V)' = c' \cdot V + c \cdot V' = c \cdot V'$.

§ 5.6. Производные тригонометрических и логарифмической функций

Теорема 5.4 (производная синуса). Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, или коротко: $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема 5.5 (производная косинуса). Если $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$, или коротко: $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. Докажем теорему 5.4 (теорема 5.5 доказывается аналогично).

Производная функции $y = f(x) = \sin x$ согласно формуле (5.8) равна $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$. Числитель правой части можно разложить по известной из тригонометрии формуле разности синусов: $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)$. Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x/2}$. Справа предел произведения равен произведению пределов, поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2). \quad (5.13)$$

Но первый предел равен единице, так как представляет собой первый замечательный предел, в котором $\Delta x/2 = \varphi \rightarrow 0$. А второй предел, в силу непрерывности косинуса, при $\Delta x \rightarrow 0$ и $x + \Delta x/2 \rightarrow x$ равен $\cos x$. Подставив эти пределы в формулу (5.13), получим то, что требуется. Теорема доказана.

Теорема 5.6 (производная тангенса). Если $y = \operatorname{tg} x$, то $y' = 1/\cos^2 x$, или коротко: $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.

Теорема 5.7 (производная котангенса). Если $y = \operatorname{ctg} x$, то $y' = -1/\sin^2 x$, или коротко: $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.

Доказательство. Докажем теорему 5.6 (теорема 5.7 доказывается аналогично). С учетом формулы (в) теоремы 5.3 имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 5.8 (производная логарифмической функции). Если $y = \log_a x$, то $y' = 1/(x \ln a) = (1/x) \log_a e$, или коротко: $(\log_a x)' = 1/(x \ln a) = (\log_a e)/x$.

Доказательство. Согласно определению производной

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}.$$

В числителе воспользуемся тем, что разность логарифмов равна логарифму отношения, поэтому

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Выражение под знаком предела разделим и умножим на x , затем множитель $1/x$ вынесем за знак предела, так как он не зависит от Δx . Получим

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Так как логарифм — непрерывная функция, знаки предела и логарифма можно поменять местами, поэтому

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}.$$

При фиксированном $x \neq 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $x/\Delta x = \tilde{x} \rightarrow \infty$. Значит, согласно теореме 4.17

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \tilde{x} \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{\tilde{x}}\right)^{\tilde{x}} = e.$$

Поэтому $(\log_a x)' = (1/x) \log_a e$. Пришли к утверждению теоремы.

В частности, при $a = e$ имеем $\ln a = \ln e = 1$ и $\log_e x = \log_e x = \ln x$. Тогда утверждение теоремы примет вид $(\ln x)' = 1/x$.

§ 5.7. Производная сложной функции

Теорема 5.9 (производная сложной функции). Если $y = f(U)$, а $U = \varphi(x)$, т. е. y — сложная функция от x ($y = f[\varphi(x)]$), причем $f(U)$ и $\varphi(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива формула

$$y'_x = f'(U) \cdot U'_x = f'(U) \cdot \varphi'(x). \quad (5.14)$$

Доказательство. Приращению Δx аргумента функции $U = \varphi(x)$ отвечает приращение $\Delta U = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, а последнему приращению аргумента U функции $y = f(U)$ отвечает приращение $\Delta y = f(U + \Delta U) - f(U)$. Таким образом, приращению Δx аргумента x в конечном счете отвечает приращение Δy рассматриваемой сложной

функции y , зависящей от x . Поэтому производная этой сложной функции будет равна

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5.15)$$

Учтем, что так как функция $U = \varphi(x)$ является дифференцируемой, то, как было доказано ранее, она непрерывна, поэтому, согласно второму определению непрерывности, для функции $U = \varphi(x)$ имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta U = 0$. Иначе говоря, $\Delta U \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$. Теперь, умножив и поделив на ΔU , запишем отношение $\Delta y / \Delta x$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$. В этом соотношении перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ (при этом $\Delta U \rightarrow 0$), кроме того, учтем, что предел правой части равен произведению пределов. В итоге получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (5.16)$$

Так как функции $y = f(U)$ и $U = \varphi(x)$ являются дифференцируемыми, то существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta U} = f'(U), \quad (5.17)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \varphi'(x). \quad (5.18)$$

Согласно (5.16) из существования пределов (5.17) и (5.18) вытекает существование предела (5.15). Производные (5.15), (5.17) и (5.18) подставим в (5.16) вместо соответствующих пределов и придем к формуле (5.14). Теорема доказана.

Например, пусть дана сложная функция $y = \cos U$, $U = \ln x$, т. е. $y = \cos(\ln x)$. По формуле (5.14) имеем для производной этой сложной функции $y'_x = (\cos U)'_U \cdot U'_x = -(\sin U)/x$. Здесь $U = \ln x$, поэтому $y'_x = -(\sin \ln x)/x$.

Аналогично получается формула для дифференцирования сложной функции, состоящей из трех или большего числа составляющих функций. Запишем формулу для дифференцирования сложной функции, состоящей из трех составляющих функций.

Пусть $y = f(U)$, $U = \varphi(V)$, $V = \psi(x)$. Имеем сложную функцию $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$. Ее производная будет равна

$$y'(x) = f'(U) \cdot U'_V \cdot V'_x = f'(U) \cdot \varphi'(V) \cdot \psi'(x).$$

Коротко правило дифференцирования сложной функции можно записать так: *производная сложной функции равна произведению производных ее составляющих по своим аргументам.*

§ 5.8. Производные степенной и показательной функций. Логарифмическое дифференцирование

Теорема 5.10 (производная степенной функции). Если $y = x^n$, то $y' = nx^{n-1}$ (коротко: $(x^n)'_x = nx^{n-1}$) при $x > 0$ для любого действительного числа $n \neq 0$, а при $x < 0$ — для любого рационального числа $n \neq 0$ с нечетным знаменателем.

Доказательство. Пусть $x > 0$. От соотношения $y = x^n$, $n \neq 0$, возьмем натуральный логарифм: $\ln y = n \cdot \ln x$. Далее продифференцируем эту функцию, при этом показатель степени n как постоянный множитель вынесем за знак производной: $(\ln y)'_x = n \cdot (\ln x)'_x$. Отсюда

$$(\ln y)'_x = \frac{n}{x}. \quad (5.19)$$

Здесь производная левой части есть производная сложной функции. Так как логарифм зависит от y , который в свою очередь зависит от x , то по формуле (5.14) имеем $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y \cdot y'_x$. Но $(\ln y)'_y = 1/y$, поэтому

$$(\ln y)'_x = \frac{1}{y} \cdot y'_x. \quad (5.20)$$

Это выражение подставим в левую часть (5.19) и получим $y'_x/y = n/x$, или $y'_x = ny/x$. Подставив сюда $y = x^n$, получим то, что требуется. Теорема доказана. При $n = 1$ теорема дает $(x)'_x = 1$.

Доказательство теоремы проведено для случая $x > 0$. Без обоснования отметим, что утверждение теоремы справедливо и для $x < 0$.

Замечание. При доказательстве теоремы соотношение $y = x^n$ сначала прологарифмировали, взяв натуральный логарифм от него, а затем полученное соотношение продифференцировали по x . Операция взятия логарифма с последующим дифференцированием называется *логарифмическим дифференцированием*, а выражение (5.20) называется *логарифмической производной*.

Теорема 5.11 (производная показательной функции). Если $y = a^x$, то $y' = a^x \ln a$, или коротко: $(a^x)'_x = a^x \ln a$.

Доказательство теоремы аналогично предыдущему. При $a = e$ теорема дает $(e^x)'_x = e^x$.

Наконец, отметим, что производные от степенно-показательных функций вида $y = [U(x)]^{v(x)}$ находятся с помощью логарифмического дифференцирования. Вычислим, например, производную функции $y = x^x$. Для этого прологарифмируем, а затем продифференцируем обе части равенства $y = x^x$. Получим $\ln y = \ln x^x$, или $\ln y = x \ln x$. Далее, $(\ln y)'_x = (x \ln x)'_x$. С учетом (5.20) имеем $y'_x/y = (x \ln x)'_x$, $y'_x = y(1 \cdot \ln x + x \cdot (1/x))$. Отсюда $y'_x = x^x(\ln x + 1)$.

§ 5.9. Неявная функция и ее производная

Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если она определена соотношением, не разрешенным относительно y :

$$F(x, y) = 0, \quad (5.21)$$

где $F(x, y)$ — известное выражение. Например, таковыми являются соотношения

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (5.22)$$

$$xy - 1 + e^y = 0. \quad (5.23)$$

Если соотношение (5.21) удастся разрешить относительно y , то мы приходим к явному заданию. Например, из (5.22) следует $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Но такой переход не всегда возможен, например, в случае функции, заданной уравнением (5.23). Однако всегда можно найти производную неявной функции. Для этого достаточно соотношение (5.21) продифференцировать по x , помня, что в нем y есть функция от x .

Сделаем это применительно к функции, определенной неявно формулой (5.23). Соотношение (5.23) продифференцируем по x , учитывая, что слагаемое xy — произведение двух функций, а слагаемое e^y — сложная функция. Получим $1 \cdot y + x \cdot y'_x + e^y \cdot y'_x = 0$. Отсюда найдем искомую производную

$$y'_x = -\frac{y}{x + e^y}. \quad (5.24)$$

В этой формуле y — значение функции, соответствующее взятому x , согласно (5.23). В частности, из соотношения (5.23) видно, что значению $x = 0$ отвечает значение $y = 0$, так как при этих значениях соотношение (5.23) выполняется. Поэтому при $x = 0$ производная y'_x , согласно (5.24), будет равна $y'_x|_{x=0} = -\frac{y}{x + e^y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{0}{0 + e^0} = 0$.

§ 5.10. Обратная функция и ее производная

Пусть дана функция $y = f(x)$. Выразим из этого соотношения x через y и получим $x = \varphi(y)$, где y — аргумент, а x — функция. Эта последняя функция называется *обратной к функции $y = f(x)$* . Ясно, что на плоскости Oxy этим функциям отвечает один график, так как они представляют собой разные формы записи одной и той же зависимости. Например, для функции $y = x^2$ обратной является $x = \pm\sqrt{y}$. Здесь каждому положительному значению y отвечают два значения x . При этом говорят, что функция $x = \pm\sqrt{y}$ является *многозначной*. В данном случае она двузначна. Ясно, что из этой двузначной функции можно получить две однозначные функции, а именно,

$x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$. Эти однозначные функции называются *ветвями* рассматриваемой многозначной функции. В дальнейшем всегда в случае многозначной обратной функции $x = \varphi(y)$ под обратной функцией будем понимать какую-либо выбранную нами однозначную ее ветвь. Например, для функции $y = x^2$ в качестве обратной можно взять либо $x = +\sqrt{y}$, либо $x = -\sqrt{y}$ по нашему усмотрению. Функции $y = x^2$ отвечает парабола (рис. 5.4).

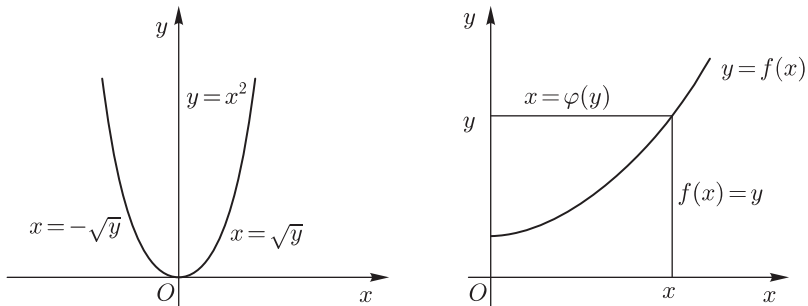


Рис. 5.4

Функциям $x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$ отвечают правая и левая части параболы, для которых $x \geq 0$ и $x < 0$ соответственно.

Отметим следующий геометрически очевидный факт: если график функции $y = f(x)$ является восходящей (нисходящей) кривой, т. е. с увеличением абсциссы x точки кривой ее ордината $y = f(x)$ увеличивается (уменьшается), то обратная к ней функция $x = \varphi(y)$ существует и будет однозначной, так как каждому значению y из области значений функции $y = f(x)$ отвечает лишь одно значение x обратной функции $x = \varphi(y)$.

В данном примере для функции $y = x^2$ это условие нарушается, так как кривая $y = x^2$ состоит из двух частей: одна является нисходящей, а другая восходящей.

Теорема 5.12 (о производной обратной функции)). Если $x = \varphi(y)$ — функция, обратная по отношению к функции $y = f(x)$, и $\varphi'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad (5.25)$$

или коротко: $y'_x = 1/x'_y$.

Доказательство. Соотношение $x = \varphi(y)$ определяет функцию, обратную к $y = f(x)$, поэтому $x = \varphi[f(x)]$. Полученное соотношение продифференцируем по x , помня, что в правой части стоит сложная функция. Тогда будем иметь $1 = \varphi'_y y'_x$. Отсюда $y'_x = 1/\varphi'_y$, или $y'_x = 1/x'_y$.

§ 5.11. Производные обратных тригонометрических функций

Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$. График функции $x = \sin y$ совпадает с графиком функции $y = \operatorname{Arcsin} x$. Для любого x из интервала $-1 \leq x \leq 1$ на графике функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ (рис. 5.5) имеется бесчисленное множество точек с абсциссой x , их ординаты — значения функции. Следовательно, эта функция является бесконечнозначной. Возьмем ту часть графика, где $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$; на этом участке для каждого x из интервала $[-1, 1]$ имеется лишь одна точка с абсциссой x . В дальнейшем под функцией $y = \arcsin x$ всегда будем понимать ветвь функции, значения которой лежат в замкнутом интервале $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, и обозначать ее $y = \arcsin x$.

Теорема 5.13. Если $y = \arcsin x$, то $y' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$, или коротко: $(\arcsin x)' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$.

Доказательство. Производная функции $x = \sin y$ равна $x'_y = \cos y$. Так как функция $y = \arcsin x$ — обратная к $x = \sin y$, то согласно (5.25) имеем

$$y'_x = 1 / \cos y. \quad (5.26)$$

Мы нашли искомую производную, но пока она выражена через y , а не через x . Но $x = \sin y$, следовательно, $\cos y$ нужно выразить через $\sin y = x$. Как известно, $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$, но функция $y = \arcsin x$ принимает значения из интервала $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Для таких y ,

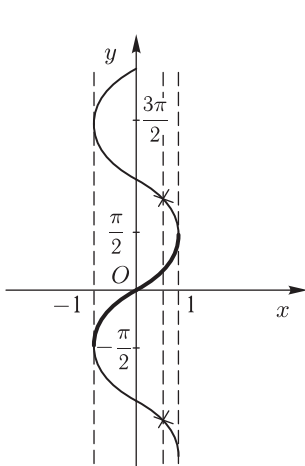


Рис. 5.5

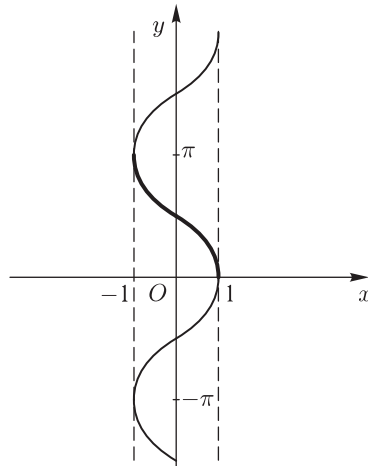


Рис. 5.6

как мы знаем, $\cos y \geq 0$, следовательно, в предыдущей формуле мы должны оставить знак «+». Таким образом, $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}$, так как $\sin y = x$, то $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Подставив это выражение в (5.26), получим утверждение теоремы 5.13.

Функция $y = \operatorname{Arccos} x$ — обратная по отношению к функции $x = \cos y$ (рис. 5.6). В дальнейшем всегда под функцией $y = \arccos x$ будем понимать однозначную ветвь функции $y = \operatorname{Arccos} x$, значения которой лежат в замкнутом интервале $0 \leq y \leq \pi$. Для этой функции справедлива следующая

Теорема 5.14. Если $y = \arccos x$, то $y'_x = -1/\sqrt{1 - x^2}$, или коротко: $(\arccos x)'_x = -1/\sqrt{1 - x^2}$.

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ является обратной по отношению к функции $x = \operatorname{tg} y$ (рис. 5.7). Выберем ее однозначную ветвь, для которой $-\pi/2 < y < \pi/2$. В дальнейшем эту ветвь будем обозначать $y = \arctg x$. Для нее справедлива

Теорема 5.15. Если $y = \arctg x$, то $y'_x = 1/(1 + x^2)$, или коротко: $(\arctg x)'_x = 1/(1 + x^2)$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 5.13.

Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$ является обратной по отношению к функции $x = \operatorname{ctg} y$. Выберем ее однозначную ветвь, значения которой лежат в интервале $0 < y < \pi$ (рис. 5.8). Обозначим эту ветвь $y = \operatorname{arccctg} x$. Для этой функции справедлива

Теорема 5.16. Если $y = \operatorname{arccctg} x$, то $y'_x = -1/(1 + x^2)$, или коротко: $(\operatorname{arccctg} x)'_x = -1/(1 + x^2)$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае теоремы 5.13.

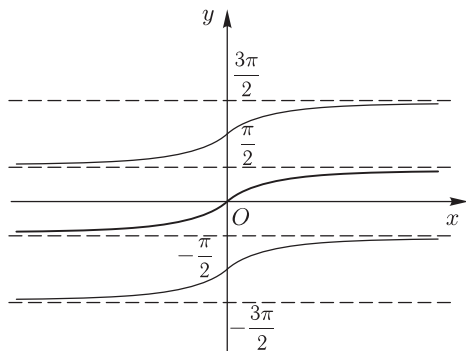


Рис. 5.7

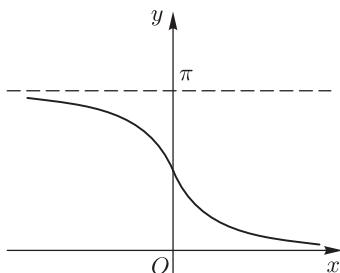


Рис. 5.8

§ 5.12. Функция, заданная параметрически, и ее дифференцирование

Даны две дифференцируемые функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (5.27)$$

Аргумент t будем называть *параметром*, пусть он изменяется в замкнутом интервале $\alpha \leq t \leq \beta$.

На плоскости Oxy возьмем точку M , координаты x, y которой вычисляются по формуле (5.27). Если t изменяется, то, вообще говоря, изменяются и координаты x, y , и точка M описывает некоторую линию (рис. 5.9). В этом случае соотношения (5.27) называют *параметрическими уравнениями* указанной линии. Из первого уравнения (5.27)

выразим t через x и получим функцию $t = \Phi(x)$, обратную к функции $x = \varphi(t)$. Это выражение для t подставим во второе уравнение (5.27) вместо t и тогда получим

$$y = \psi[\Phi(x)]. \quad (5.28)$$

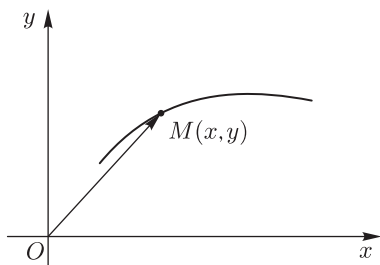


Рис. 5.9

Таким образом, оказывается, что y зависит от x , т.е. y является функцией от x . К этой функции мы пришли, исходя из формул (5.27);

следовательно, эти формулы определяют функцию y от x . Функция, определяемая из (5.27), называется *параметрически заданной*, а задание ее с помощью этих формул называется *параметрическим заданием функции*.

В качестве примеров приведем параметрические уравнения окружности и эллипса.

На плоскости Oxy возьмем окружность радиуса r с центром в начале координат, $M(x, y)$ — произвольная точка окружности (рис. 5.10). Вектор $\vec{OM}$ образует с осью Ox угол t , измеряемый в радианах. Этот угол считается положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки от оси Ox . Из рис. 5.10 видно, что

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Эти соотношения представляют собой параметрические уравнения окружности, так как при изменении t в замкнутом интервале $0 \leq t \leq 2\pi$ точка M описывает полную окружность.

Теперь возьмем на плоскости Oxy эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.29)$$

Уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (5.30)$$

представляют собой параметрические уравнения указанного эллипса. В самом деле, точка $M(x, y)$, координаты которой вычисляются по формулам (5.30), лежит на эллипсе, так как ее координаты (5.30) удовлетворяют уравнению эллипса (5.29). Кроме того, точка M при изменении t в указанном интервале описывает полный эллипс (рис. 5.11).

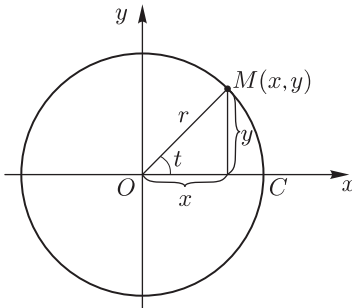


Рис. 5.10

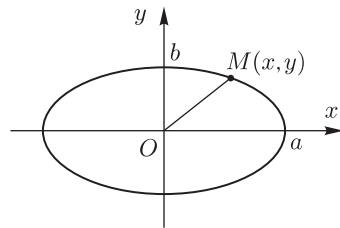


Рис. 5.11

Выведем теперь формулу для производной y'_x функции y от x , определяемой формулами (5.27). Продифференцируем по x соотношение (5.28) и учтем, что в правой части (5.28) стоит сложная функция. Получим

$$y'_x = \psi'_t t'_x. \quad (5.31)$$

Но $t = \Phi(x)$ — обратная функция к $x = \varphi(t)$, поэтому согласно (5.25) $t'_x = 1/x'_t = 1/\varphi'(t)$ и приходим к формуле

$$y'_x = \psi'(t)/\varphi'(t). \quad (5.32)$$

Она позволяет найти производную y'_x функции y от x , заданной параметрически в виде (5.27), при этом самого выражения для функции y от x мы не имеем. Формулу (5.32) записывают и так: $y'_x = y'(t)/x'(t)$.

§ 5.13. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях

Дана функция $y = f(x)$, которая дифференцируема в интервале (a, b) . Пусть x — произвольная фиксированная точка этого интервала, тогда в этой точке существует производная $f'(x)$. Это означает, что

существует конечный предел (5.3) (§ 5.2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) = f'(x)$, где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ есть приращение функции $y = f(x)$ в точке x , соответствующее приращению Δx . Отношение $\Delta y / \Delta x$ есть функция от Δx . Эта функция при $\Delta x \rightarrow 0$ имеет предел $f'(x)$, равный определенному числу, так как x — фиксированная величина. Значит (теорема 4.8), эта функция может быть представлена в виде суммы своего предела и бесконечно малой функции: $\Delta y / \Delta x = f'(x) + \alpha$, где α — бесконечно малая функция (т. е. $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$). Отсюда, умножив обе части последнего соотношения на Δx , получим

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \quad (5.33)$$

Будем считать, что в рассматриваемой точке x производная $f'(x) \neq 0$. Тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая функция одного порядка с бесконечно малой функцией Δx , так как предел их отношения существует и не равен нулю. Ясно, что Δy также является бесконечно малой функцией одного порядка с бесконечно малой функцией Δx , так как предел их отношения существует и не равен нулю. В формуле (5.33) Δy и $f'(x) \cdot \Delta x$ суть бесконечно малые функции одного порядка с бесконечно малой функцией Δx . Второе слагаемое правой части этой формулы есть бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с Δx , так как предел их отношения существует и равен нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

В этой ситуации первое слагаемое правой части (5.33) называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначается dy . Итак,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (5.34)$$

Здесь Δx — приращение аргумента, которое выбирается нами независимо от x ; если при этом Δx — бесконечно малая функция ($\Delta x \rightarrow 0$), то дифференциал (5.34) есть также бесконечно малая функция одного порядка с $\Delta x \rightarrow 0$, как и приращение Δy , входящее в (5.33). Указанный дифференциал отличается от приращения Δy на величину $\alpha \cdot \Delta x$ — функцию более высокого порядка малости, чем Δx . В этом случае говорят, что бесконечно малая dy является *главной частью* бесконечно малой Δy . Формула (5.34) для случая, когда $y = f(x) = x$, имеет вид $dy = dx = \Delta x$, так как $f'(x) = x'_x = 1$. Таким образом, дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формулу (5.34) можно записать так:

$$dy = f'(x) dx. \quad (5.35)$$

Отсюда $f'(x) = dy/dx$. Таким образом, производная представляет собой отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

При малых Δx дифференциал функции dy отличается от приращения функции Δy на величину $\alpha \Delta x$, значительно меньшую, чем Δx , и, следовательно, $\Delta y \approx dy$. Последнее соотношение используется в приближенных вычислениях. Запишем его с учетом выражений для Δy , dy следующим образом: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$. Для примера запишем это соотношение для функции $y = \sin x$:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \quad (5.36)$$

В этом соотношении положим $x = \pi/4$, $\Delta x = \pi/180$. Тогда $x + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$. Зная, что $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, по формуле (5.36) найдем приближенное значение

$$\sin 46^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{180}\right).$$

§ 5.14. Производные и дифференциалы высших порядков

Дана функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале (a, b) , т. е. в каждой точке этого интервала существует производная $f'(x)$. Эта производная в свою очередь является функцией от x , следовательно, если она дифференцируема в интервале (a, b) , то от нее можно взять производную по x , т. е. $[f'(x)]'$. Последняя называется *второй производной* или *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x) = [f'(x)]'$, или $y'' = y''_{xx} = y''_{x^2} = d^2y/dx^2$. Но вторая производная $f''(x)$ тоже есть функция от x , поэтому и от нее можно взять производную по x , если последняя существует. Получаемая производная называется *производной третьего порядка* и обозначается $f'''(x) = y''' = y'''_{xxx} = y'''_{x^3} = d^3y/dx^3$. Продолжив процесс, найдем производную любого порядка n от функции $y = f(x)$. Обозначают эту производную $f^{(n)}(x) = y^{(n)} = y^{(n)}_{x^n} = d^ny/dx^n$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) . Тогда согласно (5.35) можно найти дифференциал этой функции $dy = f'(x) dx$. Здесь дифференциал аргумента $dx = \Delta x$ не зависит от x , но в целом dy есть функция от x , поэтому от нее можно найти дифференциал $d(dy) = d[f'(x) dx]$, если в рассматриваемом интервале существует вторая производная $f''(x)$. Этот дифференциал называется *дифференциалом второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2y = d(dy)$. Имеем $d^2y = d[f'(x) dx]$. Но согласно (5.35) дифференциал правой части равен производной по x от $[f'(x) dx]$, умноженной на dx . Итак, $d^2y = d[f'(x) dx] = [f'(x) dx]'_x dx$. Здесь за знак производной

может быть вынесена постоянная величина dx . В результате получим $[f'(x) dx]'_x = f''(x) dx$ и $d^2y = f''(x)(dx)^2$. Но правая часть последнего соотношения представляет собой функцию от x , следовательно, от второго дифференциала в свою очередь можно найти дифференциал, если существует третья производная функции $f(x)$. В результате получим дифференциал третьего порядка, обозначаемый d^3y . По аналогии с предыдущим будем иметь $d^3y = f'''(x)(dx)^3$. Продолжив процесс, найдем дифференциал любого порядка n , если у функции в интервале (a, b) существует производная n -го порядка: $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$. В последней формуле в выражении $(dx)^n$ степень пишут без скобок, тогда $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$. Отсюда $f^{(n)}(x) = d^n y / dx^n$.

Глава 6

ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНЫЕ В ЗАМКНУТОМ ИНТЕРВАЛЕ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

§ 6.1. Свойства функций, непрерывных в замкнутом интервале

Теорема 6.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, то в этом интервале найдутся по крайней мере одна точка x_1 , в которой значение $f(x_1)$ функции удовлетворяет условию

$$f(x_1) \geq f(x) \quad (6.1)$$

для всех x из $[a, b]$, и по крайней мере одна точка x_2 , в которой значение $f(x_2)$ функции удовлетворяет условию

$$f(x_2) \leq f(x) \quad (6.2)$$

для всех x из $[a, b]$.

Дадим лишь геометрическое нестрогое доказательство этой и последующих двух теорем. На рис. 6.1 в плоскости Oxy изображен гра-

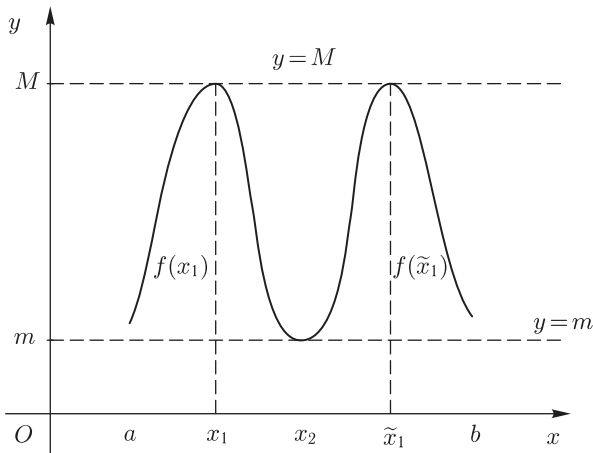


Рис. 6.1

фик функции $y = f(x)$. Так как график непрерывной функции является сплошной линией, то обязательно найдутся прямые с уравнениями $y = M$ и $y = m$ ($M > m$, M, m — постоянные), между которыми расположены все точки графика функции, исключая точки, общие с указанными прямыми, каждая из которых имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции. Абсциссы точек графика, общих с прямыми $y = M$ и $y = m$, будут соответственно значениями x_1, x_2 аргумента x , в которых имеют место соотношения (6.1) и (6.2) для соответствующих значений функции.

На рис. 6.1 $x_1, \tilde{x}_1$ — точки, значения $f(x_1) = f(\tilde{x}_1)$ функции в которых удовлетворяют неравенству (6.1). Имеется одна точка x_2 , значение $f(x_2)$ функции в которой удовлетворяет неравенству (6.1). Значение $f(x_1) = M$ функции в точке x_1 , удовлетворяющее неравенству (6.2), называется *наибольшим значением функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$* . Значение функции $f(x)$ в точке x_2 , т. е. $f(x_2) = m$, удовлетворяющее неравенству (6.2), называется *наименьшим значением функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$* .

Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна в полуоткрытом интервале $0 < x \leq 1$; $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$ ($x > 0$), и не существует такой точки x_1 , значение $f(x_1) = 1/x_1$ функции в которой было бы больше $1/x$ для всех x из $(0, 1]$. Этот факт связан с тем, что рассматриваемая функция непрерывна в полуоткрытом интервале $(0, 1]$, т. е. не выполняется условие теоремы 6.1 (о непрерывности функции в замкнутом интервале).

Теорема 6.2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$ и на концах интервала принимает значения разных знаков, то в этом интервале найдется по крайней мере одна точка c ($a < c < b$), в которой значение функции обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0$.*

Пусть, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, т. е. значение на левом конце отрицательно, а на правом положительно. Значит, точка $A(a, f(a))$ графика рассматриваемой функции лежит ниже оси Ox , а точка $B(b, f(b))$ лежит выше этой оси (рис. 6.2).

Так как график непрерывной функции — сплошная линия, то он, соединяя точки A и B , пересекает ось Ox в некоторой точке c , следовательно, ордината точки пересечения $f(c) = 0$.

Теорема 6.3. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$ и величины m, M — соответственно наименьшее и наибольшее значения этой функции в замкнутом интервале $[a, b]$. Тогда для любого числа μ , заключенного между m и M ($m \leq \mu \leq M$), найдется по крайней мере одна точка c ($a \leq c \leq b$), в которой значение функции равно этому числу μ , т. е. $f(c) = \mu$.*

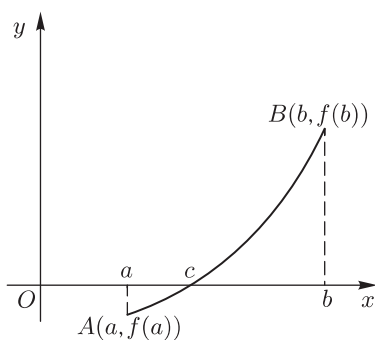


Рис. 6.2

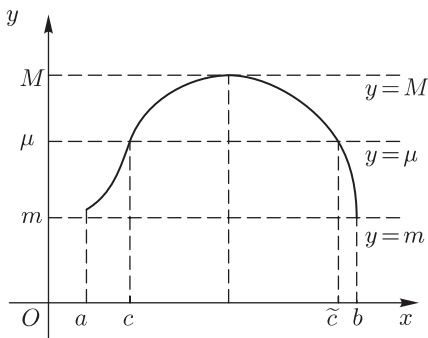


Рис. 6.3

Так как m , M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$, то ясно, что график функции $y = f(x)$ лежит между прямыми $y = M$ и $y = m$ (рис. 6.3). Возьмем число μ ($m \leq \mu \leq M$) и рассмотрим прямую $y = \mu$. Так как график функции $y = f(x)$ — сплошная линия, расположенная между прямыми $y = M$ и $y = m$, то ясно, что прямая $y = \mu$ пересечет этот график по крайней мере в одной точке. На чертеже таких точек две, их абсциссы равны c и $\tilde{c}$. Ясно, что ординаты $f(c)$ и $f(\tilde{c})$ указанных точек графика равны μ . Таким образом, значение μ функция $y = f(x)$ принимает в точках c и $\tilde{c}$.

§ 6.2. Теоремы Ферма и Ролля

Теорема 6.4 (теорема Ферма). *Если функция $f(x)$ определена в интервале (a, b) , принимает в точке $x = c$ ($a < c < b$) свое наибольшее (наименьшее) значение в (a, b) и дифференцируема в точке $x = c$, то в этой точке производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f(c)$ — наибольшее значение. Возьмем точку $c + \Delta x$, лежащую достаточно близко к точке c , считая, что Δx — величина малая. Эта точка лежит правее c при $\Delta x > 0$ и левее при $\Delta x < 0$. Так как $f(c)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$ в интервале (a, b) , то ясно, что $f(c + \Delta x) \leq f(c)$ как для $\Delta x > 0$, так и для $\Delta x < 0$, что можно переписать в виде $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ для всех $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$. Это неравенство умножим на число $1/\Delta x$, положительное при $\Delta x > 0$ и отрицательное при $\Delta x < 0$. При этом знак неравенства не изменится при $\Delta x > 0$ и изменится на обратный при $\Delta x < 0$. В результате получим:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{при } \Delta x > 0,$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

В этих неравенствах перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и согласно теории пределов (теорема 4.14) будем иметь

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{при } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

По условию теоремы функция $f(x)$ дифференцируема в точке c . Это значит, что существует производная $f'(c)$. Но производная равна пределу, входящему в предыдущие неравенства. Этот предел является обычным двусторонним и существует независимо от знака Δx . Следовательно, в двух предыдущих неравенствах пределы одинаковы и равны $f'(c)$. Поэтому предыдущие неравенства можно переписать так: $f'(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0$, $f'(c) \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Неравенства должны выполняться одновременно, а это возможно, только если $f'(c) = 0$. Теорема Ферма доказана.

Теорема 6.5 (теорема Ролля). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала и, кроме того, на концах интервала принимает одинаковые значения, то в этом интервале найдется хотя бы одна точка $x = c$, $a < c < b$, в которой значение производной $f'(x)$ обращается в нуль.*

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ не изменяется, т. е. остается постоянной ($f(x) = \text{const}$), то $f'(x) = 0$ и теорема для этого случая доказана. Пусть теперь функция $y = f(x)$ изменяется с изменением x . Пусть, например, начиная от точки $x = a$, с увеличением x значение $f(x)$ увеличивается, как показано на рис. 6.4. Тогда значение $f(a) = f(b)$ функции $f(x)$ не является наибольшим ее значением в замкнутом интервале $[a, b]$, следовательно, по теореме 6.1 свое наибольшее значение функция $f(x)$ примет в некоторой точке $x = c$, лежащей внутри $[a, b]$, т. е. $f(c) \geq f(x)$ для всех x из $[a, b]$.

По теореме Ферма $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Условие $f'(c) = 0$ геометрически означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в ее точке с абсциссой c параллельна оси Ox . В самом деле, вычисляемая в точке c производная $f'(c)$ равна тангенсу угла α наклона к оси абсцисс касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке с абсциссой $x = c$. Если эта производная равна нулю, то $f'(c) = \text{tg } \alpha = 0$ и $\alpha = 0$, т. е. касательная параллельна оси Ox .

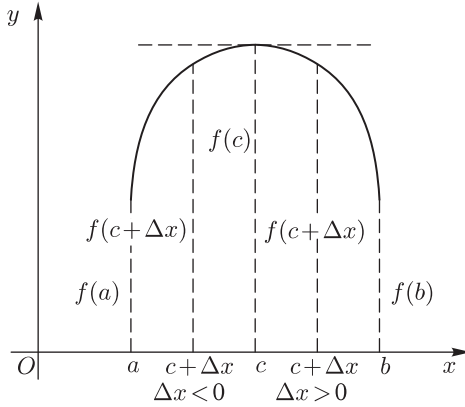


Рис. 6.4

§ 6.3. Теоремы Коши и Лагранжа

Теорема 6.6 (теорема Коши). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в замкнутом интервале $[a, b]$ и дифференцируемы во всех внутренних точках этого интервала, причем всюду в этом интервале $\varphi'(x) \neq 0$, то в $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $x = c$ ($a < c < b$), для которой справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (6.3)$$

Доказательство. Возьмем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi(x). \quad (6.4)$$

Она удовлетворяет следующим условиям:

- непрерывна на $[a, b]$, действительно, $\varphi(x)$ непрерывна в этом интервале по условию, поэтому произведение дроби и $\varphi(x)$ также есть непрерывная функция в этом интервале согласно теореме о произведении непрерывных функций;
- разность, стоящая в правой части (6.4), — непрерывная функция согласно теореме о разности непрерывных функций;
- $F(x)$ дифференцируема во всех внутренних точках интервала $[a, b]$ и имеет производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(x), \quad (6.5)$$

так как производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют согласно условию теоремы;

— значения функции $F(x)$ на концах $[a, b]$ равны, т. е. $F(a) = F(b)$.

Чтобы непосредственно убедиться в этом, надо подставить в (6.4) сначала $x = a$, затем $x = b$ и сравнить выражения.

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, согласно которой в замкнутом интервале $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $x = c$, $a < c < b$, в которой $F'(c) = 0$. Это значит, что выражение (6.5) при $x = c$ обращается в нуль, т. е.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0.$$

Учтя, что $\varphi'(c) \neq 0$ по условию теоремы, и поделив последнее соотношение на $\varphi'(c)$, приходим к формуле (6.3).

Теорема 6.7 (теорема Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала, то в $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $x = c$ ($a < c < b$), для которой справедлива формула*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (6.6)$$

Доказательство. Кроме функции $f(x)$, указанной в теореме, возьмем еще одну функцию $\varphi(x) = x$. Она дифференцируема всюду в интервале $[a, b]$, так как имеет производную $\varphi'(x) = x'_x = 1$, причем $\varphi'(x) \neq 0$. Кроме того, $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Таким образом, эта функция $\varphi(x) = x$ вместе с функцией $f(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Запишем формулу (6.3) для этих функций: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$. Здесь $a < c < b$. Умножив это соотношение на $(b - a)$, получим (6.6). Теорема доказана.

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Пусть A , B — точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами a , b соответственно. Запишем формулу (6.6) в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Но $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной к указанному графику в его точке с абсциссой $x = c$, а левая часть последней формулы

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

где α_1 — угол наклона хорды AB к оси Ox . Так как $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1$, хорда AB параллельна вышеуказанной касательной.

Отметим, что фигурирующая в теоремах Ролля, Коши, Лагранжа точка $x = c$ ($a < c < b$) неизвестна, известно лишь, что такая точка существует. Поэтому формулы (6.3) и (6.6) для вычислений не используются, но они имеют большое теоретическое значение.

§ 6.4. Правило Лопиталья

Теорема 6.8 (правило Лопиталья). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \rightarrow x_0$ (x_0 — заданное число) или при $x \rightarrow \infty$. Если при этом отношение производных $f'(x)/\varphi'(x)$ имеет предел, то отношение функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т. е.

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (6.7)$$

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда при $x \rightarrow x_0$ обе функции имеют пределы, равные нулю, и непрерывны в точке x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$. В теореме говорится о пределе отношения производных $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Это означает, что указанные производные мы предполагаем существующими всюду вблизи x_0 как слева, так и справа.

Возьмем интервал $(x_0, x]$, считая, что x — некоторое фиксированное значение, достаточно близкое к x_0 . Тогда в этом интервале, включая x , всюду существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$. Следовательно, в интервале $(x_0, x]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются непрерывными, поскольку они дифференцируемы. Кроме того, функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны и в точке x_0 . Таким образом, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в замкнутом интервале $[x_0, x]$ и дифференцируемы всюду внутри него. Дополнительно предположим, что $\varphi'(x)$ нигде в этом интервале не обращается в нуль (это предположение является естественным, так как $\varphi'(x)$ в формуле (6.7) стоит в знаменателе). Таким образом, эти две функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Поэтому для них и интервала $[x_0, x]$ справедлива указанная теорема, когда в ней $a = x_0$ и $b = x$. Итак,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad x_0 < c < x.$$

Но $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0$. Следовательно, эта формула примет вид

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad x_0 < c < x. \quad (6.8)$$

Согласно условию теоремы существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow x_0} [f'(x)/\varphi'(x)]$. Отсюда согласно определению предела заключаем, что существует и предел $\lim_{c \rightarrow x_0} [f'(c)/\varphi'(c)]$, $x_0 < c < x$. Этот предел будет равен предыдущему, и получим

$$\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (6.9)$$

В соотношении (6.8) перейдем к пределу, когда $x \rightarrow x_0$ и $c \rightarrow x_0$, учитывая, что предел правой части существует. Тогда будет существовать и предел левой части, равный первому:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (6.10)$$

Сравнив формулы (6.9) и (6.10), придем к формуле (6.7). Теорема для указанного случая доказана. Случай, когда $x \rightarrow \infty$, приводится к рассмотренному заменой $x = 1/\tilde{x}$, при этом $\tilde{x} \rightarrow 0$. Доказательство для случая, когда $\varphi(x) \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow \infty$, опускаем.

Замечание. Может оказаться, что функции $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$. Тогда к пределу отношения производных вновь можем применить правило Лопиталья, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

Пример. Требуется найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Поскольку $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, то согласно правилу Лопиталья $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$, если существует последний предел. Здесь снова и числитель, и знаменатель стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$, поэтому для нахождения последнего предела снова можем воспользоваться правилом Лопиталья. Поэтому окончательно $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Замечание к теореме. Если предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow x_0} [f'(x)/\varphi'(x)]$ не существует, то правило Лопиталья неприменимо.

Сказанное покажем на примере. Рассмотрим предел отношения функций

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}. \quad (6.11)$$

Возьмем предел отношения производных этих функций

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x),$$

но этот предел не существует, так как при неограниченном изменении угла x , измеренного в радианах, функция $\cos x$ принимает значения, заключенные между -1 и 1 , следовательно, $1 + \cos x$ ни к какому пределу не стремится. Однако предел (6.11) отношения функций существует. Убедимся в этом.

Предел (6.11) запишем так: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (\sin x)/x)$. Согласно теореме о пределе суммы он равняется сумме пределов, а предел постоянной равен ей самой. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right)$. Здесь второй предел равен нулю, так как $1/x \rightarrow 0$, т. е. является

бесконечно малой функцией при $x \rightarrow \infty$, а $\sin x$ является ограниченной функцией при $x \rightarrow \infty$, так как $|\sin x| \leq 1$. Но произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции есть снова бесконечно малая функция. Итак, предел в правой части последней формулы равен нулю, и мы получили $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Таким образом, предел (6.11) отношения функций существует и равен 1, в то время как предел отношения их производных не существует.

§ 6.5. Раскрытие неопределенностей

Всюду в настоящем параграфе будем рассматривать предел, когда $x \rightarrow x_0$ (x_0 — заданное число) или когда $x \rightarrow \infty$, но конкретизировать это условие не будем. Пусть при этом $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к нулю, и требуется найти предел отношения $\lim [f(x)/\varphi(x)]$. Чтобы найти этот предел, мы не можем воспользоваться теоремой о пределе частного, так как предел знаменателя равен нулю. Говорят, что здесь *имеется неопределенность типа* $(0/0)$. Эта неопределенность раскрывается по правилу Лопиталья.

Пусть теперь $f(x)$, $\varphi(x)$ одновременно стремятся к бесконечности, и требуется найти предел их отношения $\lim [f(x)/\varphi(x)]$. Говорят, что здесь *имеется неопределенность типа* (∞/∞) . Эта неопределенность также раскрывается с помощью правила Лопиталья. Рассмотрим другие виды неопределенностей.

Требуется найти

$$\lim [f(x) \cdot \varphi(x)], \quad (6.12)$$

когда $f(x) \rightarrow 0$, а $\varphi(x) \rightarrow \infty$. Тогда говорят, что *имеется неопределенность типа* $(0 \cdot \infty)$. Эту неопределенность можно привести к одному из двух предыдущих видов неопределенности. Предел (6.12) можно записать так: $\lim \frac{f(x)}{[1/\varphi(x)]}$, и получаем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$, так как $\frac{1}{\varphi(x)} \rightarrow 0$. Предел (6.12) можно записать и так: $\lim \frac{\varphi(x)}{[1/f(x)]}$. Здесь $1/f(x) \rightarrow \infty$, как и $\varphi(x)$, поэтому получаем неопределенность типа (∞/∞) , т. е. остается применить правило Лопиталья.

Пример 1. Требуется найти $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$.

Здесь $\ln x \rightarrow -\infty$, и имеем неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$. Согласно предыдущему утверждению

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x}. \quad (6.13)$$

Получили неопределенность типа (∞/∞) . Для нахождения предела в правой части применим правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'_x}{(1/x)'_x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2}. \quad (6.14)$$

Здесь снова и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности при $x \rightarrow 0$, и для нахождения этого предела снова можно воспользоваться правилом Лопиталья. Тогда вновь придем к неопределенности (∞/∞) , так как в числителе появится дробь $1/x^2$, а в знаменателе дробь $1/x^3$. Этот процесс можно продолжать, никогда не доходя до конца. Поэтому к (6.14) правило Лопиталья применять не нужно, а достаточно просто преобразовать предел. Он будет равен $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$. Искомый предел функции (6.13) также равен нулю. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = 0$.

Рассмотрим предел

$$\lim [f(x)]^{\varphi(x)}, \quad (6.15)$$

в котором $f(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow 0$. Говорят, что здесь *имеется неопределенность типа 0^0* . Если требуется найти предел (6.15), когда $f(x) \rightarrow \infty$, а $\varphi(x) \rightarrow 0$, то говорят, что *имеется неопределенность типа ∞^0* .

Если $f(x) \rightarrow 1$, а $\varphi(x) \rightarrow \infty$ и нужно найти (6.15), то говорят, что *имеется неопределенность типа 1^∞* . Все эти неопределенности раскрываются одним методом. Рассмотрим первый случай.

Пусть $f(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow 0$. Искомый предел обозначим $A = \lim [f(x)]^{\varphi(x)}$. Пока будем искать не сам предел A , а $\ln A$. Согласно предыдущему соотношению имеем $\ln A = \ln \lim [f(x)]^{\varphi(x)}$. Но логарифм, как основная элементарная функция, является непрерывной функцией, поэтому знак логарифма и знак предела можно переставить местами, и получим $\ln A = \lim \ln [f(x)]^{\varphi(x)}$. В правой части воспользуемся свойством логарифмов: $\ln A = \lim [\varphi(x) \cdot \ln f(x)]$. Но здесь по условию $\varphi(x) \rightarrow 0$, а $\ln f(x) \rightarrow -\infty$, так как $f(x) \rightarrow 0$, т. е. получили неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$, которую раскрывать умеем. Раскрыв ее, найдем предел в правой части последнего соотношения, который обозначим a , тогда $\ln A = a$, a — найденное число. Отсюда $A = e^a$.

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.

Здесь имеем неопределенность типа 0^0 . Искомый предел обозначим через $A = \lim_{x \rightarrow 0} x^x$. Будем пока искать $\ln A$. Возьмем от последнего соотношения натуральный логарифм: $\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} x^x$. В правой части знаки логарифма и предела поменяем местами и получим $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^x$, отсюда $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$. Предел правой части, как было показано в примере 1, равен нулю, т. е. $\ln A = 0$, поэтому $A = e^0 = 1$. Итак, искомый предел $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$.

Глава 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 7.1. Возрастание и убывание функции

Функция называется *возрастающей* в интервале, если большему значению аргумента отвечает большее значение функции, при этом интервал называется *интервалом возрастания* функции.

Функция называется *убывающей* в интервале, если большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции, при этом интервал называется *интервалом убывания* функции.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности*, а сама функция называется *монотонной*.

Ясно, что график возрастающей функции $y = f(x)$ на плоскости Oxy является восходящей линией (рис. 7.1), так как ордината $y = f(x)$

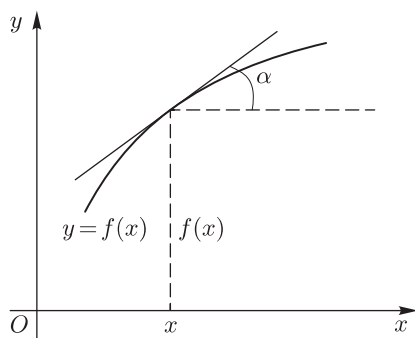


Рис. 7.1

точки графика функции увеличивается с увеличением абсциссы x этой точки (график убывающей функции является нисходящей линией).

Теорема 7.1 (необходимый признак возрастания и убывания функции). *Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в интервале, то всюду в этом интервале $f'(x) \geq 0$; если она убывает в интервале, то всюду в нем $f'(x) \leq 0$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает в интервале, тогда по определению при $\Delta x > 0$ имеем $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$. Поэтому $[f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x > 0$. Отсюда согласно теореме 4.14 имеем $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ([f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x) \geq 0$. Для убывающей функции доказательство аналогично.

Теперь получим достаточный признак возрастания и убывания функции.

Теорема 7.2. *Если производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ всюду в интервале положительна (отрицательна), то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает (убывает). Если всюду в интервале производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ равна нулю, то функция $f(x)$ в этом интервале остается постоянной величиной, т.е. $f(x) = \text{const}$.*

Доказательство. Докажем одно из утверждений теоремы (остальные доказываются аналогично).

Пусть всюду в интервале $f'(x) > 0$ и x_1, x_2 — две произвольные точки этого интервала, причем $x_1 < x_2$, т.е. $x_2 - x_1 > 0$. Возьмем замкнутый интервал $[x_1, x_2]$. Для него и рассматриваемой функции $f(x)$ запишем формулу Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2. \quad (7.1)$$

По условию $f'(x) > 0$ всюду, поэтому $f'(c) > 0$, а так как $x_2 - x_1 > 0$, то выражение в правой части формулы (7.1) положительно, т.е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$ для любого $x_2 > x_1$. Это означает, что $f(x)$ — возрастающая функция в рассматриваемом интервале.

§ 7.2. Точки экстремума функции. Необходимый признак экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутом интервале

Пусть x_0 — внутренняя точка области определения $[a, b]$ функции $f(x)$, т.е. $a < x_0 < b$. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если для всех отличных от x_0 точек x некоторой окрестности точки x_0 (другими словами, некоторого малого интервала, содержащего внутри себя точку x_0), выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если для всех отличных от x_0 точек некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* этой функции, а значения функции в этих точках — *экстремальными* (соответственно *максимальными* или *минимальными*) значениями.

Возьмем, например, непрерывную в интервале $[a, b]$ функцию, график которой изображен на рис. 7.2. Для этой функции x_1 — точка

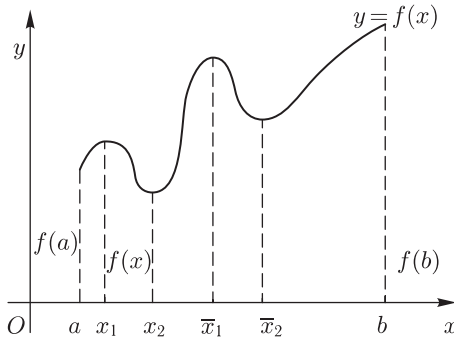


Рис. 7.2

максимума, так как значение $f(x_1)$ больше значений функции $f(x)$ во всех соседних точках, т.е. оно является наибольшим значением функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_1 . Аналогично, $\bar{x}_1$ — точка максимума функции $f(x)$. Кроме того, x_2 и $\bar{x}_2$ являются точками минимума функции $f(x)$. В то же время для функции с графиком, указанным на рисунке, минимальное значение $f(\bar{x}_2)$ больше $f(x_1)$ — максимального значения этой функции.

Отметим также, что максимальное значение функции, как и минимальное ее значение, определяются для достаточно малого интервала, содержащего точку максимума или минимума функции. Эти значения нельзя путать с наибольшим и наименьшим значениями функции на интервале $[a, b]$. Дело в том, что эти последние значения функция может принимать на концах интервала. Эти значения могут также совпадать с максимальным и минимальным значениями функции. Например, для функции, график которой указан на рис. 7.2, наибольшим значением функции в интервале $[a, b]$ является $f(b)$ — значение на правом конце интервала, а наименьшее значение функции здесь совпадает с одним из минимальных значений $f(x_2)$.

Из сказанного следует, что для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на $[a, b]$ нужно поступить так:

- найти все максимальные и минимальные значения функции в интервале $[a, b]$;
- вычислить значения $f(a)$, $f(b)$ этой функции на концах интервала $[a, b]$;
- из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Эти значения будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Теорема 7.3 (необходимый признак экстремума функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная $f'(x)$ в этой точке обращается в нуль, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, например, точка ее максимума. Это означает, что значение $f(x_0)$ функции в этой точке является наибольшим значением функции в некотором, достаточно малом интервале, содержащем внутри себя точку x_0 . Но тогда согласно теореме Ферма производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Однако в точке экстремума производная функции $f(x)$ может не существовать. Покажем это на примере функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. В точке $x_0 = 0$ она принимает значение, равное нулю, которое является минимальным значением $f(x)$, так как во всех соседних точках x значения функции положительны. Производная этой функции $f'(x) = \frac{2x^{-1/3}}{3}$ в точке $x = 0$ не существует. График функции показан на рис. 7.3.

С другой стороны, не всякая точка, в которой производная функции обращается в нуль или не существует, является точкой экстремума. Покажем это на примере функции $f(x) = x^3$, производная которой $f'(x) = 3x^2$. В точке $x = 0$ производная обращается в нуль. Но эта точка не является точкой экстремума функции. В самом деле, для всех x , отличных от нуля, производная $f'(x)$ положительна. Отсюда согласно достаточному признаку возрастания функции получаем, что функция $f(x)$ возрастает и слева, и справа от точки $x = 0$, следовательно, $x = 0$ не есть точка экстремума. Эта функция имеет график, показанный на рис. 7.4.

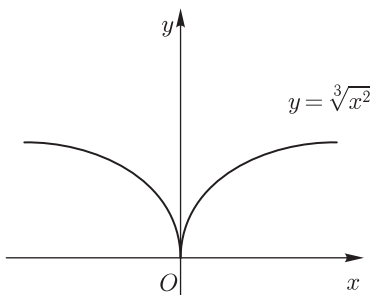


Рис. 7.3

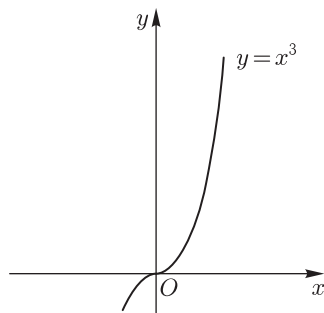


Рис. 7.4

Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками* функции $f(x)$. Как мы видели, не всякая критическая точка является точкой

экстремума функции $f(x)$. На вопрос о том, будет критическая точка точкой экстремума функции или нет, отвечают достаточные признаки экстремума функции.

§ 7.3. Достаточные признаки экстремума функции

Теорема 7.4 (первый достаточный признак экстремума функции). *Критическая точка x_0 является точкой экстремума дифференцируемой всюду, за исключением, быть может, точки x_0 функции $f(x)$, если ее производная $f'(x)$ изменяет знак при переходе x через x_0 (с увеличением x). При перемене знака с «+» на «-» x_0 — точка максимума, а при перемене с «-» на «+» x_0 — точка минимума функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть, например, производная $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-» при переходе x через критическую точку x_0 с увеличением x . Это означает, что при $x < x_0$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$. Но тогда согласно достаточному признаку возрастания и убывания функции слева от x_0 имеется интервал возрастания функции, а справа от x_0 — интервал убывания функции. Следовательно, график функции имеет вид, представленный на рис. 7.5. Это означает, что x_0 — точка максимума функции $f(x)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

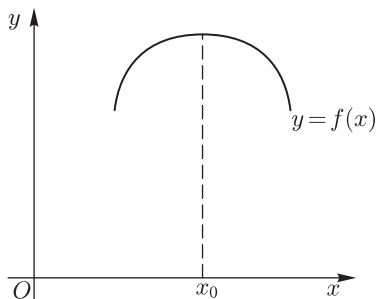


Рис. 7.5

Рассмотрим схему исследования функции на экстремум. Чтобы найти экстремум функции $y = f(x)$, нужно:

- найти критические точки этой функции, т. е. точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует;
- каждую критическую точку исследовать с помощью достаточного признака экстремума;
- найти экстремальные значения функции, подставив в выражение $f(x)$ вместо x точки экстремума.

Пример 1. Найдем экстремумы функции $y = x^2$ (ее график показан на рис. 7.6). Здесь $f(x) = x^2$, тогда $f'(x) = 2x$. Следуя описанной схеме, получим:

- производная этой функции $f'(x) = 2x = 0$ в точке $x = 0$ (это единственная критическая точка функции);

- исследуем эту точку с помощью достаточного признака экстремума: при $x < 0$ имеем $f'(x) = 2x < 0$, при $x > 0$ имеем $f'(x) = 2x > 0$, т. е. $f'(x)$ изменяет знак с «−» на «+», поэтому $x = 0$ есть точка минимума функции $f(x)$;
- находим минимальное значение функции $f(0) = 0$.

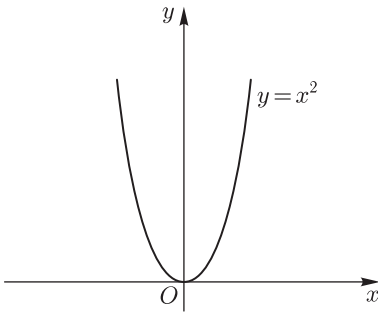


Рис. 7.6

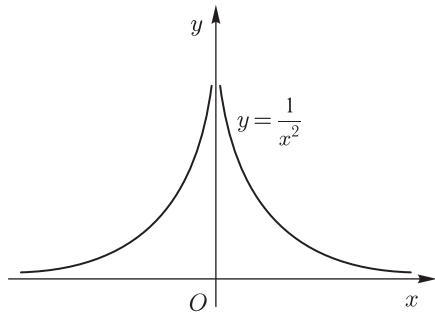


Рис. 7.7

Если критическая точка является точкой разрыва функции $f(x)$ и в ней функция обращается в бесконечность, то эта критическая точка не будет точкой экстремума функции, если даже при переходе через нее изменяется знак производной $f'(x)$. Например, для функции $f(x) = 1/x^2$ точка $x = 0$ является критической точкой, так как в ней производная $f'(x) = -2/x^3$ не существует. Знак этой производной изменяется с «+» на «−». При этом точка $x = 0$ не является точкой максимума, так как в ней функция имеет разрыв: $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$. График этой функции показан на рис. 7.7.

Теорема 7.5 (второй достаточный признак экстремума функции). Пусть x_0 — критическая точка дважды дифференцируемой функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума $f(x)$, а именно, точкой максимума при $f''(x_0) < 0$ и точкой минимума при $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $f''(x_0) > 0$. Нужно показать в этом случае, что критическая точка x_0 — точка минимума. Для упрощения доказательства дополнительно предположим, что $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 . Это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0)$.

Возьмем число ε , равное $f''(x_0)/2$. Это число положительное согласно условию. Для него согласно определению предела функции $f''(x)$ при $x \rightarrow x_0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ будет выполняться неравенство $|f''(x) - f''(x_0)| < f''(x_0)/2$, или $-f''(x_0)/2 < f''(x) - f''(x_0) <$

$< f''(x_0)/2$. Тогда $f''(x_0)/2 < f''(x) < 3f''(x_0)/2$, т.е. для всех x из интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ выполняется неравенство $0 < f''(x_0)/2 < f''(x)$. Значит, $f''(x) > 0$, или $(f'(x))' > 0$. Отсюда ясно, что в указанном интервале производная $f'(x)$ возрастает, так как ее производная $f''(x) = (f'(x))' > 0$. Поэтому большему значению аргумента x отвечают большие значения функции: $f'(x) < f'(x_0) = 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > f'(x_0) = 0$ при $x > x_0$. Итак, знак $f'(x)$ изменяется с « $-$ » на « $+$ » при переходе x через x_0 с увеличением x . Согласно первому достаточному признаку экстремума приходим к выводу, что x_0 — точка минимума. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 2. Найдем экстремум функции $y = \sin x$ в интервале $0 < x < \pi$. Здесь $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. При исследовании функции $y = \sin x$ воспользуемся вышеуказанной схемой:

- $f'(x) = \cos x$ обращается в нуль только в точке $x = \pi/2$ интервала $0 < x < \pi$;
- исследуем эту точку с помощью второго достаточного признака экстремума, здесь $f''(\pi/2) = -\sin \pi/2 = -1 < 0$; следовательно, $x = \pi/2$ — точка максимума;
- находим максимальное значение $f(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$.

Рассмотрим одну из задач на нахождение наибольшего значения функции в интервале.

Задача. Дан квадратный жестяной лист со стороной a . По углам листа вырезают одинаковые квадраты и, сгибая лист по линиям выреза, образуют коробку. Какова должна быть длина x сторон вырезанных квадратов, чтобы объем V коробки был наибольшим?

Основанием коробки служит квадрат со стороной $a - 2x$, высота коробки равна x , поэтому объем коробки равен

$$V = (a - 2x)^2 x. \quad (7.2)$$

Ясно, что в (7.2) аргумент x изменяется в интервале $0 \leq x \leq a/2$. Нужно найти точку, в которой функция принимает наибольшее значение в этом интервале. На концах интервала, т.е. при $x = 0$ и при $x = a/2$, функция (7.2) обращается в нуль, а внутри интервала принимает положительные значения. Следовательно, наибольшее значение функция принимает внутри интервала $(0, a/2)$. Найдем в этом интервале точки максимума рассматриваемой функции. Производная $V'_x = (a - 2x)(a - 6x)$ этой функции обращается в нуль в единственной точке $x = a/6$ интервала $(0, a/2)$. Ясно, что она является точкой максимума функции (7.2), в которой эта функция принимает наибольшее значение в интервале $(0, a/2)$. Таким образом, получен ответ: $x = a/6$.

§ 7.4. Выпуклость линии. Точки перегиба кривой

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* в интервале (a, b) , если она лежит ниже любой своей касательной в точках, абсциссы которых лежат в этом интервале (рис. 7.8). Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вогнутой)* в интервале (a, b) , если она лежит выше любой своей касательной в точках, абсциссы которых лежат в этом интервале (рис. 7.9).

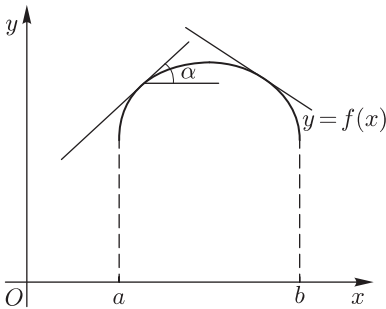


Рис. 7.8

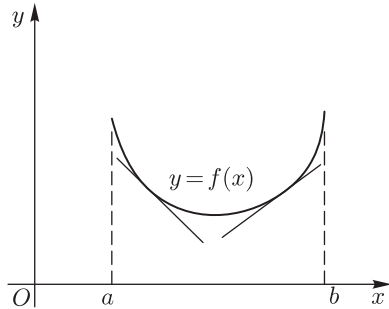


Рис. 7.9

Точка кривой, отделяющая ее часть, выпуклую вверх, от части, выпуклой вниз, называется *точкой перегиба*. Ясно, что касательная к кривой в точке перегиба пересекает кривую, так как часть, выпуклая вверх, лежит ниже касательной, а выпуклая вниз — выше касательной (рис. 7.10).

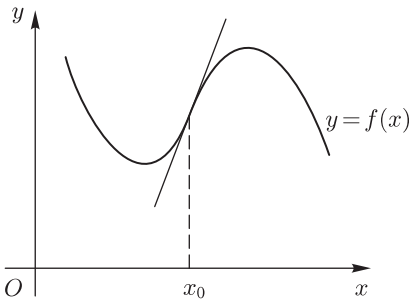


Рис. 7.10

Здесь и далее будем считать, что функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема всюду в области определения (если иное не оговорено особо). Известно, что вычисленная в точке x производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α , образованного

с осью Ox касательной к кривой в ее точке с абсциссой x . Для кривой, выпуклой вверх (рис. 7.8), с увеличением x угол α убывает; следовательно, убывает $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, значит, производная $(f'(x))' = f''(x) \leq 0$ согласно необходимому признаку убывания функции. Аналогично убедимся в том, что если кривая $y = f(x)$ выпуклая вниз, то $f''(x) \geq 0$. Итак, пришли к следующей теореме.

Теорема 7.6 (необходимые признаки выпуклости кривой). Если кривая $y = f(x)$ является выпуклой вверх в (a, b) , то в этом интервале $f''(x) \leq 0$; если кривая $y = f(x)$ является выпуклой вниз в (a, b) , то в этом интервале $f''(x) \geq 0$.

Теорема 7.7 (достаточные признаки выпуклости кривой). Если $f''(x) < 0$ всюду в интервале (a, b) , то в этом интервале кривая $y = f(x)$ выпуклая вверх. Если $f''(x) > 0$ всюду в интервале (a, b) , то в этом интервале кривая $y = f(x)$ выпуклая вниз.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f''(x) < 0$ всюду в интервале (a, b) . Тогда, согласно достаточному признаку убывания функции, в этом интервале $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ убывает с увеличением x всюду в интервале (a, b) . Следовательно, кривая $y = f(x)$ является выпуклой вверх, что очевидно геометрически. Теорема доказана.

Теорема 7.8 (необходимый признак точки перегиба). Если x_0 — абсцисса точки перегиба кривой $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Точка перегиба отделяет выпуклую вверх часть от выпуклой вниз. Будем считать, что вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в точке x_0 . Для выпуклой вверх части кривой $y = f(x)$, согласно необходимому признаку выпуклости кривой, $f''(x) \leq 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0) \leq 0$. Для выпуклой вниз части кривой $y = f(x)$, согласно необходимому признаку выпуклости кривой, $f''(x) \geq 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0) \geq 0$. Но эти два соотношения должны выполняться одновременно, следовательно, $f''(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Абсциссой точки перегиба может служить и значение x_0 , при котором $f''(x)$ не существует. Покажем это на примере кривой $y = \sqrt[3]{x}$. Здесь $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = (1/3) \cdot x^{-2/3}$, $f''(x) = -(2/9) \cdot x^{-5/3}$. Отметим, что при $x = 0$ вторая производная

$f''(x)$ не существует, т. е. не существует $f''(0)$. Кроме того, видим, что $f''(x) > 0$ при $x < 0$, а при $x > 0$ имеем $f''(x) < 0$. Значит, по теореме 7.7 при $x < 0$ кривая выпуклая вниз, а при $x > 0$ — выпуклая вверх. Это означает, что $x = 0$ есть абсцисса точки перегиба рассматриваемой кривой. Это также очевидно из графика функции (рис. 7.11).

Теорема 7.9 (достаточный признак точки перегиба). Точка (x_0, y_0) кривой $y = f(x)$ является точкой перегиба, если $f''(x)$ обращается

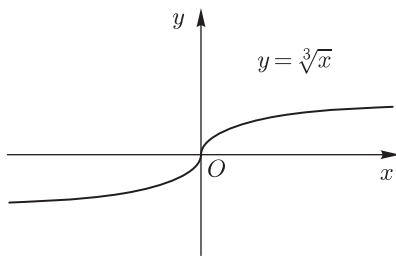


Рис. 7.11

в нуль или не существует при $x = x_0$ и знак второй производной $f''(x)$ изменяется при переходе x через x_0 (с увеличением x). При перемене знака с « $-$ » на « $+$ » участок выпуклости вверх сменяется участком выпуклости вниз, а при перемене с « $+$ » на « $-$ » участок выпуклости вниз сменяется участком выпуклости вверх.

Доказательство. Пусть знак $f''(x)$ изменяется с « $-$ » на « $+$ » при переходе x через x_0 с увеличением x , т.е. при $x < x_0$ имеем $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$ получим $f''(x) > 0$. Тогда, согласно достаточному признаку выпуклости кривой, слева от x_0 лежит участок выпуклости вверх кривой, а справа от x_0 — участок выпуклости вниз. Следовательно, x_0 — абсцисса точки перегиба кривой $y = f(x)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Для нахождения точек перегиба кривой $y = f(x)$ требуется:

- найти точки, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или не существует;
- каждую такую точку исследовать с помощью достаточного признака точки перегиба;
- найти ординаты точек перегиба, подставив их абсциссы в выражение $y = f(x)$ вместо x .

Пример. Найти точку перегиба линии $y = x^3$. Здесь $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Далее:

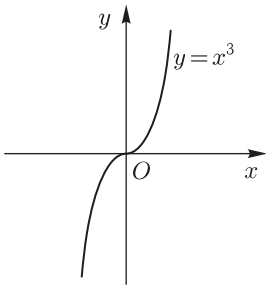


Рис. 7.12

- производная $f''(x) = 6x$ существует всюду и обращается в нуль в единственной точке $x = 0$;
- исследуем точку $x = 0$ с помощью достаточного признака точки перегиба: при $x < 0$ имеем $f''(x) = 6x < 0$, а при $x > 0$ $f''(x) = 6x > 0$, т.е. знак « $-$ » изменяется на « $+$ », следовательно, $x = 0$ есть абсцисса точки перегиба;
- подставив $x = 0$ в уравнение кривой, получим ординату точки перегиба $y = 0$.

Итак, точкой перегиба кривой является точка $(0, 0)$. Эта кривая имеет график, представленный на рис. 7.12.

§ 7.5. Асимптоты кривой

Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние от точки этой кривой до прямой стремится к нулю, когда указанная точка неограниченно удаляется от начала координат. Рассмотрим два вида асимптот.

Вертикальные асимптоты. Дана кривая с уравнением $y = f(x)$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, где x_0 — заданное число, то кривая имеет *вертикальную асимптоту* с уравнением $x = x_0$. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty$. Здесь график функции будет иметь вид, указанный, например, на рис. 7.13.

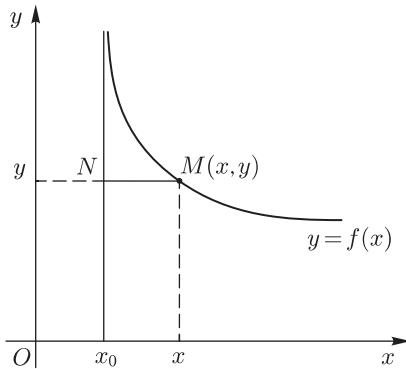


Рис. 7.13

На кривой $y = f(x)$ возьмем точку M с абсциссой x и ординатой $f(x)$. Пусть точка N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $x = x_0$. Тогда расстояние от точки M до прямой с уравнением $x = x_0$ равно $MN = x - x_0$.

По условию при $x \rightarrow x_0$, когда $x - x_0 = MN$ стремится к нулю, имеем $f(x) \rightarrow \infty$, а точка M кривой неограниченно удаляется от начала координат. Иначе говоря, когда при $x \rightarrow x_0$ точка M неограниченно удаляется от начала координат, расстояние MN стремится к нулю. Это значит, что прямая с уравнением $x = x_0$ есть асимптота линии $y = f(x)$.

Наклонные асимптоты. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* с уравнением $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент асимптоты, т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha$, угол α образован с осью Ox асимптотой (рис. 7.14). На кривой $y = f(x)$ возьмем точку M с координатами $(x, f(x))$. На прямой $y = kx + b$ (асимптоте рассматриваемой кривой) возьмем точку M_1 с той же абсциссой, что и у точки M . Ее ордината равна $kx + b$. Поэтому

$$MM_1 = f(x) - (kx + b). \quad (7.3)$$

Так как мы рассматриваем наклонную асимптоту, то считаем, что угол α не равен $\pi/2$. Это означает, что $\cos \alpha \neq 0$. Пусть точка N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на асимптоту.

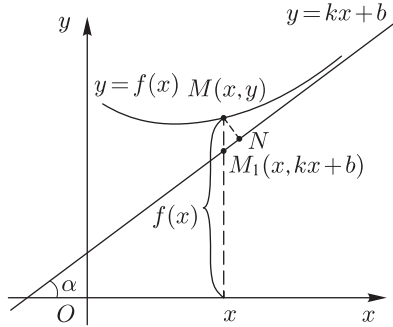


Рис. 7.14

Получили прямоугольный треугольник NNM_1 . Из него найдем выражение $MN = MM_1 \cos \alpha$, поэтому будем иметь

$$MM_1 = \frac{NM}{\cos \alpha}. \quad (7.4)$$

Прямая $y = kx + b$ есть асимптота линии $y = f(x)$, следовательно, расстояние MN от точки M до прямой стремится к нулю, когда точка M неограниченно удаляется от начала координат, т.е. ее абсцисса x стремится к бесконечности.

Итак, $MN \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, значит, согласно (7.4) $MM_1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow \infty} MM_1 = 0$. Подставим сюда вместо MM_1 выражение (7.3) и получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0. \quad (7.5)$$

Из (7.5) видно, что выражение под знаком предела — бесконечно малая функция, которую обозначим через $p(x)$. Тогда $p(x) = f(x) - (kx + b)$ или $f(x) = kx + b + p(x)$, где $p(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Это соотношение поделим на x , перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$ и учтем, что предел суммы есть сумма пределов. Получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{x}.$$

Поскольку $1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, произведение постоянной b на $1/x$ есть бесконечно малая функция, а ее предел равен нулю. Аналогично $\lim_{x \rightarrow \infty} (p(x)/x) = 0$. Предел постоянной k равен k , поэтому

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (7.6)$$

Соотношение (7.5) запишем так: $\lim_{x \rightarrow \infty} [(f(x) - kx) - b] = 0$. Учтем, что слева предел разности равен разности пределов и $\lim_{x \rightarrow \infty} b = b$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) - b = 0, \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Итак, мы показали, что если линия $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, то обязательно существуют два конечных предела (7.6) и (7.7) для чисел k и b , входящих в уравнение асимптоты. И наоборот, если для линии $y = f(x)$ существуют два конечных предела (7.6), (7.7), то эта линия имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. В этом можно убедиться, проведя изложенные выше рассуждения в обратном порядке.

Пример. Возьмем кривую с уравнением $y = f(x)$, где $f(x) = x^2/(1+x)$. Эта кривая имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = -1$. В самом деле, $\lim_{x \rightarrow -1} [x^2/(1+x)] = \infty$.

Найдем наклонную асимптоту этой линии. Вычислим сначала предел (7.6): $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x}$. Последний предел найдем по правилу Лопиталья, так как здесь и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности. Получим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(1+x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$. Итак, $k = 1$. Теперь найдем предел (7.7):

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x}.$$

Последний предел равен 1, следовательно, $b = -1$. Зная k и b , запишем уравнение наклонной асимптоты $y = x - 1$.

§ 7.6. Общая схема исследования функций и построения графиков

Общая схема исследования функции $y = f(x)$ заключается в следующем:

- находим область определения функции и ее точки разрыва;
- отыскиваем сначала критические точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует; затем находим интервалы возрастания и убывания функции, в которых $f'(x)$ сохраняет знак, точки максимума и минимума, максимальное и минимальное ее значения;
- определяем точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, затем находим интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$, в которых $f''(x)$ сохраняет знак, и точки перегиба;
- отыскиваем асимптоты кривой.

При построении графика целесообразно сначала изобразить асимптоты.

Пример. Исследуем функцию $y = f(x) = x^2/(1+x)$. Имеем $f'(x) = x(x+2)(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$. Далее следуем вышеуказанной схеме.

Функция определена всюду, кроме точки $x = -1$, которая является точкой разрыва, причем $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow -1$. Областью определения является совокупность интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$. Производная $f'(x)$ обращается в нуль в точках $x = -2$ и $x = 0$ и не существует в точке $x = -1$. Итак, критическими точками являются $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. Ими определяются интервалы возрастания и убывания функции: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$. В них соответственно $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$, т. е. $f(x)$ сначала возрастает, потом убывает, опять убывает и снова возрастает. Точка $x_1 = -2$ является точкой максимума, так как знак первой производной изменяется с «+» на «-»; $y_{\max} = f(x)|_{x=-2} = -4$. Точка $x_2 = -1$ не является точкой экстремума (рис. 7.15), так как она — точка разрыва

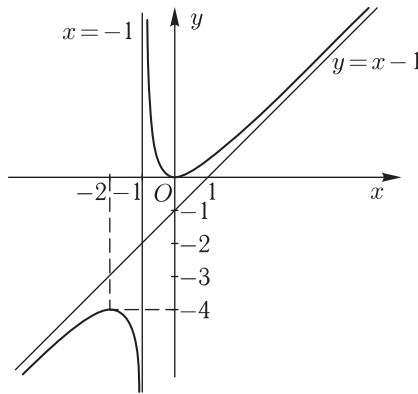


Рис. 7.15

функции. Точка $x_3 = 0$ — точка минимума функции $f(x)$, так как при переходе через нее первая производная изменяет знак с «-» на «+», и $y_{\min} = f(x)|_{x=0} = 0$. Вторая производная $f''(x)$ не существует в точке $x = -1$; в интервале $(-\infty, -1)$ она отрицательна, значит, кривая выпукла вверх, а в интервале $(-1, +\infty)$ кривая выпукла вниз, так как здесь $f''(x) > 0$. Точка $x = -1$ не является абсциссой точки перегиба, поскольку функция в этой точке не определена. Кривая имеет асимптоты: вертикальную $x = 1$ и наклонную $y = x - 1$. График исследуемой функции представлен на рис. 7.15.

Глава 8

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 8.1. Производная длины дуги кривой

Пусть в плоскости Oxy задана кривая $y = f(x)$ (рис. 8.1), точка M_0 с абсциссой x_0 — фиксированная точка кривой, а точка M

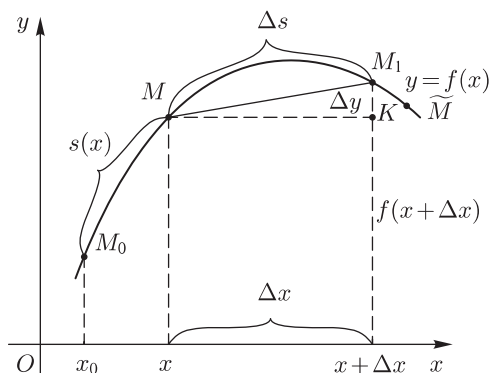


Рис. 8.1

с абсциссой x — переменная точка. Введем понятие длины дуги части $\widehat{M_0M}$ заданной кривой. Дугу $\widehat{M_0M}$ разделим на n частей точками $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \dots, \widetilde{M}_{n-1}$. Каждые две соседние точки, включая M_0 и M , соединим хордой и получим ломаную $M_0\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\dots M$, соединяющую точки M_0 и M и состоящую из n звеньев. Длину ломаной обозначим через l_n . Число n всех звеньев устремим к бесконечности так, чтобы длины звеньев стремились к нулю. При этом вышеуказанная ломаная по форме будет приближаться к дуге $\widehat{M_0M}$. Поэтому за длину дуги кривой $\widehat{M_0M}$ естественно принять $s = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$. Так как M — переменная точка с абсциссой x , то с изменением положения точки M (с изменением абсциссы x этой точки) длина дуги s изменяется. Следовательно, эта дуга есть функция от x — абсциссы точки M . Обозначим ее $s = s(x)$.

На кривой возьмем точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$. На рис. 8.1 показан случай, когда $\Delta x > 0$. Длина дуги кривой $\widehat{M_0 M_1}$ получается из функции $s(x)$ заменой x на $x + \Delta x$, т. е. заменой абсциссы x точки M на абсциссу $x + \Delta x$ точки M_1 .

Итак, длина дуги кривой $\widehat{M_0 M_1}$ есть $s(x + \Delta x)$. Длина дуги $\widehat{M M_1} = s(x + \Delta x) - s(x) = \Delta s$ — это приращение функции $s(x)$ в точке x , соответствующее приращению Δx . Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = s'(x). \quad (8.1)$$

Точка M с абсциссой x кривой $y = f(x)$ имеет ординату $f(x)$, а ордината точки M_1 есть $f(x + \Delta x)$. Тогда разность этих ординат $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ есть приращение функции, соответствующее приращению Δx и вычисляемое для точки x , причем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) = y'_x$. Из треугольника $M K M_1$, у которого сторона $K M_1 = \Delta y$, получаем $(M M_1)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Это отношение разделим на $(\Delta x)^2$ и получим $(M M_1)^2 / (\Delta x)^2 = 1 + (\Delta y)^2 / (\Delta x)^2$. Отсюда

$$\left(\frac{M M_1}{\Delta s} \right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}. \quad (8.2)$$

Будем считать, что кривая с уравнением $y = f(x)$ такова, что функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$. Можно показать (принимается без доказательства), что для такой кривой имеет место условие

$$\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{M M_1}{\Delta s} = 1. \quad (8.3)$$

Иначе говоря, предел отношения длины хорды $M M_1$, стягивающей дугу $\widehat{M M_1}$, к длине Δs этой дуги равен 1. В соотношении (8.2) перейдем к пределу, когда $M_1 \rightarrow M$ и $\Delta x \rightarrow 0$. Учтем, что слева предел произведения равен произведению пределов. Справа предел суммы равен сумме пределов и предел квадрата (произведения) равен квадрату (произведению) пределов. В итоге имеем

$$\left(\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{M M_1}{\Delta s} \right)^2 \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2.$$

Слева первый предел согласно (8.3) равен 1, а второй предел равен $s'(x)$ согласно (8.1). Справа предел равен $y'(x)$. Значит,

$$(s'(x))^2 = 1 + (y'(x))^2,$$

т. е.

$$s'(x) = \sqrt{1 + (y'_x)^2}. \quad (8.4)$$

Получили формулу для вычисления производной длины дуги кривой $s = s(x)$, когда эта кривая задана уравнением $y = f(x)$.

§ 8.2. Кривизна кривой на плоскости

Пусть на плоскости Oxy задана кривая. Возьмем на ней дугу $\widehat{MM_1}$ и в точках M, M_1 проведем касательные к кривой (рис. 8.2). Угол α , на который поворачивается касательная к кривой в точке M_1 , когда точка M_1 перемещается к точке M , называется *углом смежности* дуги $\widehat{MM_1}$.

Отношение угла смежности α к длине дуги $\widehat{MM_1}$.

$$\frac{\alpha}{\widehat{MM_1}} \quad (8.5)$$

характеризует искривленность дуги $\widehat{MM_1}$ данной длины.

В самом деле, чем больше искривлена дуга $\widehat{MM_1}$, тем больше угол смежности α и тем больше отношение (8.5). Например, для дуги $\widehat{\widetilde{MM_1}}$ той же длины, что и дуга $\widehat{MM_1}$, угол смежности $\tilde{\alpha} > \alpha$, так как дуга $\widehat{\widetilde{MM_1}}$ искривлена больше, чем исходная дуга, и $\tilde{\alpha}/\widehat{\widetilde{MM_1}} > \alpha/\widehat{MM_1}$. Но нас интересует искривленность не всей дуги $\widehat{MM_1}$, а искривленность кривой в точке M . Ясно, что чем ближе точка M_1 к точке M , тем лучше отношение (8.5) характеризует искривленность кривой в точке M . Ясно также, что искривленность кривой в точке M наиболее полно характеризует предел отношения (8.5), когда $M_1 \rightarrow M$. Этот предел называют *кривизной кривой в точке M* и обозначают K . Итак,

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\alpha}{\widehat{MM_1}}. \quad (8.6)$$

Легко показать, что кривизна окружности радиуса R в любой ее точке равна числу $1/R$. Теперь получим формулу для вычисления кривизны кривой.

Пусть на плоскости Oxy задана кривая $y = f(x)$ (рис. 8.3) и функция $f(x)$ имеет вторую производную. В точке M этой кривой с абсциссой x требуется вычислить кривизну K этой кривой. Пусть на рассматриваемой кривой M_0 — фиксированная точка, а M — переменная точка с абсциссой x . Длину дуги $\widehat{M_0M}$ обозначим $s(x)$. На кривой возьмем точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$. Согласно (8.1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta s / \Delta x) = s'_x$. Известно, что вычисленная в точке x производная $y'_x = f'(x)$ равна тангенсу угла φ , образованного с осью абсцисс

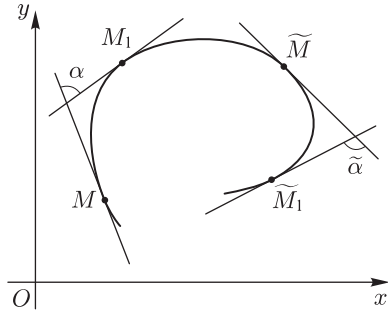


Рис. 8.2

касательной к кривой в ее точке M с абсциссой x . Ясно, что этот угол φ будет изменяться с изменением абсциссы x точки M . Это значит, что φ есть функция от x , которую обозначим $\varphi(x)$. В точке кривой M_1 с абсциссой $x + \Delta x$ этот угол будет равен $\varphi(x + \Delta x)$. Ясно, что разность $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi$ — приращение функции $\varphi(x)$ в точке x , соответствующее приращению Δx . Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \varphi'_x. \quad (8.7)$$

Из треугольника $N_1N_2N_3$ (рис. 8.3), образованного касательными в точках M и M_1 и осью Ox , видно, что $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi$ —

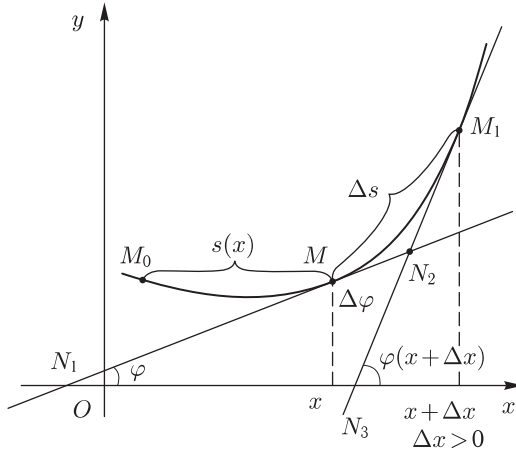


Рис. 8.3

углу между касательными, следовательно, $\Delta\varphi$ есть угол смежности дуги $\widehat{MM_1}$, длина которой равна Δs . Поэтому согласно формуле (8.6) (в которой α нужно заменить на $|\Delta\varphi|$) для кривизны K кривой в точке M имеем $K = \lim_{M_1 \rightarrow M} (|\Delta\varphi| / \widehat{MM_1}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} (|\Delta\varphi| / \Delta s)$.

В правой части и числитель, и знаменатель поделим на Δx , получим $K = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \frac{|\Delta\varphi| \Delta x}{\Delta s \Delta x}$. Предел отношения равен отношению пределов, поэтому

$$K = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta\varphi| / \Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta s / \Delta x}.$$

Согласно (8.7) предел числителя равен $|\varphi'_x|$, а предел знаменателя равен s'_x . Следовательно,

$$K = \frac{|\varphi'_x|}{s'_x}. \quad (8.8)$$

Но $\operatorname{tg} \varphi = y'_x$, следовательно, $\varphi = \operatorname{arctg} y'_x$. Возьмем отсюда производную по x , учтя, что правая часть — сложная функция от x . Имеем

$$\varphi'_x = \frac{1}{1 + (y'_x)^2} (y'_x)'_x = \frac{y''_{xx}}{1 + (y'_x)^2}.$$

Это выражение подставим в числитель (8.8), а в знаменатель запишем выражение (8.4) вместо s'_x . Тогда

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{[1 + (y'_x)^2]^{3/2}}. \quad (8.9)$$

Эта формула позволяет вычислить кривизну кривой в ее точке M с абсциссой x , когда кривая задана уравнением $y = f(x)$. Сказанное относится к любой точке M , т. е. в каждой точке кривой будет своя кривизна K — функция абсциссы x точки M .

Пример. Пусть $y = x^2$, $y'_x = 2x$, $y''_{xx} = 2$. Формула (8.9) дает $K = 2(1 + (2x)^2)^{-3/2}$. Эта формула определяет кривизну параболы с уравнением $y = x^2$ (рис. 8.4) в любой ее точке M с абсциссой x . Например, в начале координат $(0, 0)$ кривизна $K = 2$.

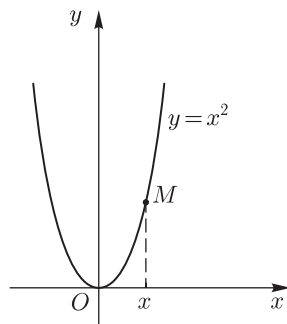


Рис. 8.4

§ 8.3. Радиус, центр и круг кривизны кривой на плоскости

Пусть в плоскости Oxy задана кривая с уравнением $y = f(x)$, причем функция $f(x)$ имеет вторую производную (рис. 8.5). Для этой кривой по формуле (8.9) найдем кривизну в точке M с абсциссой x . Будем считать, что $K > 0$.

Радиусом кривизны этой кривой в точке M называется число, обозначаемое R и равное $R = 1/K$, где K — только что найденная кривизна.

В точке M проведем нормаль (прямую, перпендикулярную к касательной) в сторону вогнутости кривой. На этой нормали отложим отрезок $MC = R$. Точка C называется *центром кривизны* кривой $y = f(x)$ для ее точки M . Круг радиуса R с центром в точке C

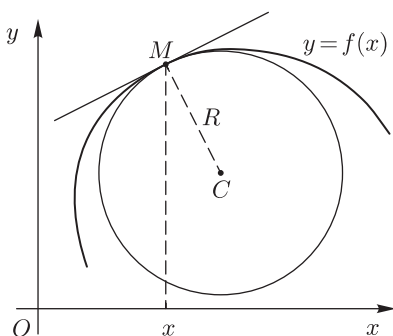


Рис. 8.5

называется *кругом кривизны* этой кривой для точки M . Ясно, что для каждой точки M будут свои радиус, центр и круг кривизны, т. е. с изменением положения точки M они изменяются.

§ 8.4. Параметрические и векторное уравнения линии в пространстве

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана точка $M(x, y, z)$ (рис. 8.6), а ее координаты представляют собой заданные функции некоторого аргумента t — параметра, т. е.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (8.10)$$

С изменением t значения этих функций изменяются, следовательно, изменяются координаты x, y, z точки M , и эта точка описывает некоторую линию в пространстве. Соотношения (8.10) называются *параметрическими уравнениями* этой линии. Каждое из уравнений (8.10) умножим соответственно на базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и сложим. Получим

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (8.11)$$

Левую и правую части этого соотношения обозначим соответственно:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (8.12)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (8.13)$$

Тогда соотношение (8.11) запишется так:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (8.14)$$

Формула (8.14) называется *векторным уравнением* рассматриваемой кривой.

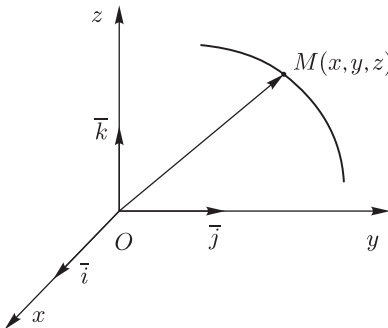


Рис. 8.6

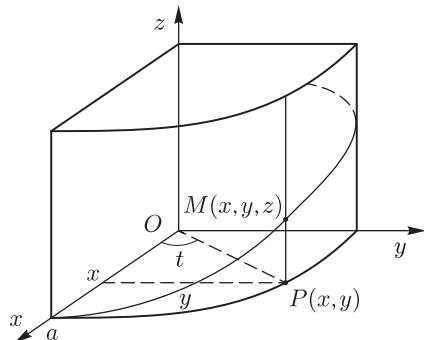


Рис. 8.7

Как видно из (8.12) и (8.13), выражение (8.14) есть радиус-вектор точки M , начало которого всегда совпадает с началом координат, а его конец — точка M — описывает вышеуказанную линию.

Пример. Винтовая линия. Пусть в системе координат $Oxyz$ задан круговой цилиндр с образующими, параллельными Oz . Его направляющей служит расположенная на плоскости Oxy окружность радиуса a с центром в начале координат $(0, 0, 0)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка цилиндра. Через нее проведем образующую, пересекающую плоскость Oxy в точке P . Пусть t есть угол, образованный радиусом OP с осью Ox . Этот угол отсчитывается от Ox и считается положительным, когда отсчет ведется против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу оси Oz , и отрицательным, если он отсчитывается в противоположном направлении.

Как видно из рис. 8.7, координаты точки P определяются формулами $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. Такими же будут абсцисса и ордината точки M . Пусть аппликата z точки M выражается формулой $z = ht/(2\pi)$, где h — заданное положительное число.

Итак, координаты точки M определяются формулами

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{ht}{2\pi}. \quad (8.15)$$

Ясно, что положение точки M зависит от значения t . При $t = 0$ точка M совпадает с точкой P и находится на оси Ox . С увеличением t точка P движется по окружности, а точка M , находясь с ней на одной образующей, движется по цилиндрической поверхности, поднимаясь вверх. При $t = 2\pi$ точка M окажется на плоскости Oxz на высоте $z = h$. Эта линия называется *винтовой*. При неограниченном увеличении t точка M поднимается вверх, а когда t принимает отрицательные значения и стремится к $-\infty$, точка M винтовой линии уходит неограниченно вниз. Ясно, что соотношения (8.15) представляют собой параметрические уравнения этой винтовой линии. Поступая, как ранее, запишем векторное уравнение винтовой линии в виде (8.14), где

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + \frac{h}{2\pi} t \vec{k}.$$

§ 8.5. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента

Введенное выше выражение

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \quad (8.16)$$

называется *векторной функцией скалярного аргумента t* . Пределом функции (8.16) при $t \rightarrow t_0$, где t_0 — заданное число, называется вектор,

определяемый формулой

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \vec{k}. \quad (8.17)$$

И в дальнейшем пределы берутся при $t \rightarrow t_0$, но это условие для простоты записи будем опускать. Длина вектора в формуле (8.17) равна $|\lim \vec{r}(t)| = \sqrt{(\lim x(t))^2 + (\lim y(t))^2 + (\lim z(t))^2}$. Но квадрат предела равен пределу квадрата, и под корнем мы получим сумму пределов квадратов, которая равна пределу суммы. Поэтому имеем

$$|\lim \vec{r}(t)| = \sqrt{\lim [(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2]}.$$

В свою очередь, знаки корня и предела можно переставить, так как квадратный корень — непрерывная функция своего аргумента. В правой части после перестановки знаков корня и предела под знаком предела получим $\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$, а это есть не что иное, как длина вектора $\vec{r}(t)$ формулы (8.16), т. е. $|\vec{r}(t)|$. Итак, имеем

$$|\lim \vec{r}(t)| = \lim |\vec{r}(t)|. \quad (8.18)$$

Начало векторной функции $\vec{r}(t)$ всегда будем помещать в начале координат $Oxyz$. Тогда при изменении t эта векторная функция изменяется по длине и направлению, и конец этой векторной функции (точка M) в системе координат $Oxyz$ описывает некоторую линию. Каждому значению параметра t отвечает определенный вектор $\vec{r}(t)$ с концом в точке M , координаты которой равны проекциям вектора $\vec{r}(t)$ на оси координат, т. е.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (8.19)$$

Наряду с некоторым фиксированным значением параметра t возьмем новое его значение $t + \Delta t$. Этому значению на кривой отвечает точка M_1 , радиус-вектор которой есть $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис. 8.8). Ясно, что $\vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t) \vec{i} + y(t + \Delta t) \vec{j} + z(t + \Delta t) \vec{k}$.

Обозначим:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t), \quad \Delta z = z(t + \Delta t) - z(t).$$

Тогда $\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$. Этот вектор умножим на $1/\Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}. \quad (8.20)$$

Но Δx , Δy , Δz — приращения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, поэтому пределы отношений правой части (8.20) равны соответственно x'_t , y'_t , z'_t по определению производной. Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}. \quad (8.21)$$

Левую часть этой формулы назовем *производной векторной функции* $\vec{r}'(t)$ из (8.16) и обозначим

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (8.22)$$

Теперь (8.21) можно записать в виде

$$\vec{r}'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k}. \quad (8.23)$$

Эта формула определяет производную от векторной функции $\vec{r}(t)$, заданной (8.16).

Выясним геометрический смысл этой производной. Предположим, что $\Delta t > 0$. Тогда точка M_1 с радиус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ отвечает большему значению $t + \Delta t$ параметра по сравнению с точкой M . Значит, показанный на рис. 8.8 вектор $\overrightarrow{MM_1}$ направлен в сторону возрастания параметра t . Имеем $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$. Этот вектор умножим на положительное число $1/\Delta t$ и получим

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MN}, \quad (8.24)$$

где вектор $\overrightarrow{MN}$, согласно правилу умножения вектора на число, направлен как вектор $\overrightarrow{MM_1}$ и отличается от него только длиной. Заметим, что этот вектор направлен по секущей MM_1 в сторону возрастания t . В формуле (8.24) перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0, \\ M_1 \rightarrow M}} \overrightarrow{MN}.$$

Левая часть этой формулы согласно (8.22) есть производная $\vec{r}'(t)$, поэтому $\vec{r}'(t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0, \\ M_1 \rightarrow M}} \overrightarrow{MN}$. Как было замечено выше, вектор $\overrightarrow{MN}$ направлен по секущей MM_1 в сторону возрастания t . В пределе эта секущая займет положение касательной к кривой в точке M , поэтому $\vec{r}'(t) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \overrightarrow{MN}$ есть вектор, направленный по касательной к кривой в ее точке M в сторону возрастания параметра t .

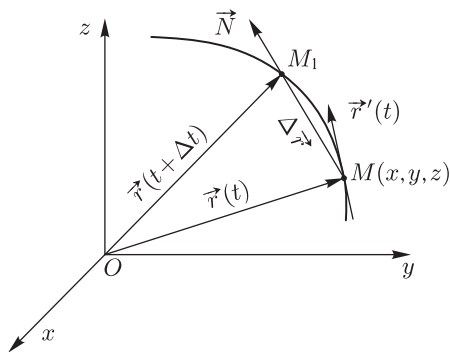


Рис. 8.8

Начало вектора $\vec{r}'(t)$ условимся помещать в точке M . Отметим, что так как рассматриваемую кривую описывает конец вектора $\vec{r}(t)$, то векторное уравнение этой кривой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (8.25)$$

а соотношения (8.19) представляют собой параметрические уравнения линии.

Правила дифференцирования векторной функции. Пусть даны две дифференцируемые векторные функции $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$, т. е. функции, которые имеют производные, вычисляемые по формуле (8.23). Для них справедливы формулы

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' &= \vec{r}_1' + \vec{r}_2'; & (\vec{r}_1, \vec{r}_2)' &= (\vec{r}_1', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2'); \\ (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' &= \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'. \end{aligned}$$

Эти соотношения устанавливаются непосредственной проверкой.

§ 8.6. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для пространственной кривой

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана кривая параметрическими уравнениями (8.19) (рис. 8.9). Поступая, как и выше, от (8.19) перейдем к векторному уравнению (8.25) этой кривой, в котором $\vec{r}(t)$ выражается формулой (8.16).

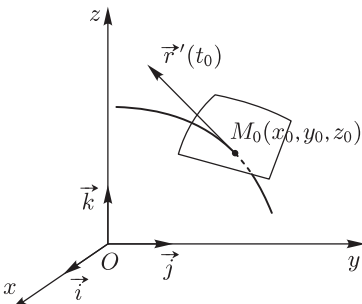


Рис. 8.9

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка кривой, отвечающая заданному значению параметра $t = t_0$, t_0 — заданное число. По этому числу найдем координаты точки M_0 , подставив $t = t_0$ в формулу (8.19): $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Это будут известные нам числа. По формуле (8.23) вычислим $\vec{r}'(t)$ — производную векторной функции (8.16).

Подставив значение $t = t_0$, отвечающее точке M_0 , найдем вектор $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$, направленный по касательной к кривой в точке M_0 . Проекции этого вектора $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ — известные числа. Зная проекции этого вектора, лежащего на касательной, и координаты точки M_0 касательной, запишем канонические уравнения этой касательной

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (8.26)$$

Плоскость, проходящая через точку M_0 рассматриваемой кривой перпендикулярно ее касательной, называется *нормальной плоскостью* для этой кривой в точке M_0 . Зная координаты точки M_0 и проекции нормального вектора $\vec{r}'(t_0)$ для этой плоскости, получим уравнение этой нормальной плоскости:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

§ 8.7. Первая и вторая производные векторной функции скалярного аргумента по длине дуги кривой

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана кривая M_0MM_1 (рис. 8.10), где M_0 — фиксированная, а M — переменная точка этой кривой. Пусть s — длина дуги $\widehat{M_0M}$. Понятие этой длины для пространственной кривой вводится так же, как и для кривой на плоскости. Пусть M_1 — точка, следующая за точкой M при движении по кривой в направлении от точки M_0 в сторону точки M . Пусть длина $\widehat{MM_1} = \Delta s$, тогда длина $\widehat{M_0M_1} = s + \Delta s$ ($\Delta s > 0$), и точке M_1 отвечает длина дуги $s + \Delta s$, отсчитываемая от точки M_0 . Таким образом, каждой точке кривой отвечает определенное значение параметра s . Поэтому величину s можно взять вместо t в качестве параметра в уравнениях кривой. Параметрические уравнения кривой примут вид

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (8.27)$$

По этим формулам определяем координаты x, y, z точки M кривой, когда эта точка M отвечает взятому значению параметра s . От параметрических уравнений (8.27), поступив, как и выше, перейдем к векторному уравнению кривой

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad (8.28)$$

где

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}. \quad (8.29)$$

Радиус-вектор точки M равен $\vec{r}(s)$. Радиус-вектор точки M_1 , отвечающей значению $s + \Delta s$, получается по формуле (8.29) заменой s на $s + \Delta s$, т. е. равен $\vec{r}(s + \Delta s)$. Разность этих радиус-векторов:

$$\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s) = \Delta \vec{r}, \quad (8.30)$$

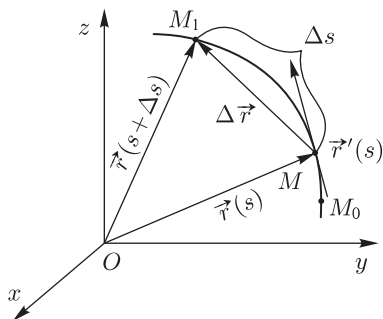


Рис. 8.10

$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{MM_1}. \quad (8.31)$$

По определению производной векторной функции имеем

$$\vec{r}'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (8.32)$$

Мы знаем, что эта производная есть вектор, направленный по касательной к рассматриваемой линии в точке M в сторону возрастания s . Выясним, чему равна длина этого вектора. Согласно (8.32) имеем $|\vec{r}'(s)| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta \vec{r} \right|$. Но, как мы знаем (см. (8.18)), длина предела вектора равна пределу длины вектора, поэтому

$$|\vec{r}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta \vec{r} \right|. \quad (8.33)$$

Согласно правилу умножения вектора на число можно записать $\left| \frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta \vec{r} \right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$ (здесь мы учли, что $\Delta s > 0$). Подставим это выражение в (8.33) и получим

$$|\vec{r}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}. \quad (8.34)$$

Из (8.31) будем иметь

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{|\overrightarrow{MM_1}|}{\overline{MM_1}}.$$

Как и в случае кривых на плоскости (см. (8.3)), последний предел равен 1. Иначе говоря, предел отношения длины хорды к длине стягивающей дуги равен 1, когда длина хорды стремится к нулю. Это имеет место в случае кривых, для которых функция (8.29) имеет непрерывную производную, что мы и будем предполагать.

Предел в формуле (8.34) равен 1, следовательно, $|\vec{r}'(s)| = 1$. Таким образом, вектор $\vec{r}'(s)$ имеет длину, равную 1, т. е. он является единичным вектором. Обозначим его $\vec{\sigma} = \vec{r}'(s)$. Ясно, что этот вектор $\vec{\sigma}$ для каждого значения s (для каждой точки M) будет свой, т. е. он является функцией от s : $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(s)$. Согласно (8.29)

$$\vec{r}'(s) = x'(s) \vec{i} + y'(s) \vec{j} + z'(s) \vec{k}. \quad (8.35)$$

Длина этого вектора равна единице, следовательно,

$$\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} = 1.$$

Теперь рассмотрим вторую производную $\vec{r}''(s)$ от вектора (8.29). Так как $\vec{\sigma}(s) = \vec{r}'(s)$, то

$$\vec{r}''(s) = \vec{\sigma}'(s). \quad (8.36)$$

Нам нужно рассмотреть $\vec{\sigma}'(s)$.

По определению $\vec{\sigma}(s)$ — единичный вектор касательной для произвольной точки M кривой, которая отвечает значению параметра s . Ясно (рис. 8.11), что в точке M_1 , отвечающей значению $s + \Delta s$, вектор касательной получится из $\vec{\sigma}(s)$ заменой s на $s + \Delta s$, т. е. этот вектор будет $\vec{\sigma}(s + \Delta s)$ (это тоже единичный вектор). Перенесем вектор $\vec{\sigma}(s + \Delta s)$ параллельно самому себе и поместим его начало в точку M . Тогда разность $\vec{\sigma}(s + \Delta s) - \vec{\sigma}(s) = \Delta \vec{\sigma}$. По определению производной векторной функции имеем

$$\vec{\sigma}'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta \vec{\sigma}. \quad (8.37)$$

Заметим, что $M_1 \rightarrow M$ при $\Delta s \rightarrow 0$.

На рис. 8.11 вектор $\Delta \vec{\sigma}$ направлен по основанию равнобедренного треугольника, равные стороны которого — это единичные векторы $\vec{\sigma}(s)$ и $\vec{\sigma}(s + \Delta s)$. Угол при вершине M обозначим $\Delta \varphi$.

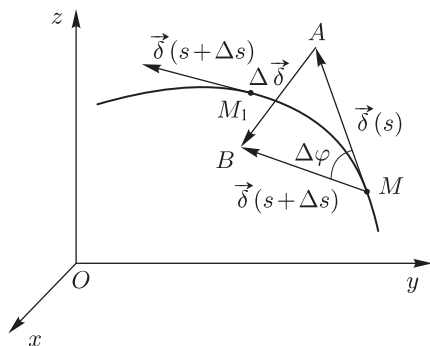


Рис. 8.11

Рассмотрим длину вектора (8.37): $|\vec{\sigma}'(s)| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \Delta \vec{\sigma} \right|$. Отсюда, как и выше, имеем $|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta s} \Delta \vec{\sigma} \right|$. Поступив так же, как при переходе от (8.33) к (8.34), получим

$$|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\sigma}|}{\Delta s}. \quad (8.38)$$

Длина вектора $\Delta \vec{\sigma}$ есть длина основания вышеуказанного треугольника. Чтобы найти эту длину, опустим из точки M перпендикуляр на основание. Тогда получим два прямоугольных треугольника. Угол при вершине M у них равен $\Delta \varphi / 2$, и длина $|\Delta \vec{\sigma}|$ равна удвоенному катету одного из треугольников:

$$|\Delta \vec{\sigma}| = 2 |\vec{\sigma}(s)| \sin(\Delta \varphi / 2) = 2 \sin(\Delta \varphi / 2).$$

Это выражение подставим в (8.38) и получим

$$|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta \varphi / 2)}{\Delta s}.$$

Справа дробь умножим и поделим на $\Delta \varphi$:

$$|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{2 \sin(\Delta \varphi / 2)}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right].$$

Учтем, что справа предел произведения равен произведению пределов:

$$|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Легко заметить, что первый из пределов равен 1, так что

$$|\vec{\sigma}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (8.39)$$

Но $\Delta\varphi$ — это угол, на который поворачивается вектор $\vec{\sigma}(s + \Delta s)$, проходящий по касательной в точке M_1 к кривой, когда точка $M_1 \rightarrow M$. Значит, это есть угол смежности дуги $\widehat{MM_1}$ длины Δs (это определение вводится по аналогии со случаем кривых на плоскости). По аналогии с определением кривизны кривой в точке M для плоских кривых предел отношения угла смежности к длине соответствующей дуги, когда $M_1 \rightarrow M$, назовем *кривизной кривой в точке M* и обозначим K . Тогда кривизна кривой $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta\varphi/\Delta s)$. Теперь формула (8.39) примет вид

$$|\vec{\sigma}'(s)| = K. \quad (8.40)$$

После дифференцирования обеих частей (8.35) имеем

$$\vec{r}''(s) = x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j} + z''(s)\vec{k}.$$

Длина этого вектора равна

$$|\vec{r}''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}.$$

Но согласно (8.36) $|\vec{r}''(s)| = |\vec{\sigma}'(s)|$. С учетом (8.40) придем к формуле

$$K = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}. \quad (8.41)$$

Итак, мы нашли длину вектора $|\vec{\sigma}'(s)| = |\vec{r}''(s)|$. Выясним теперь направление этого вектора $\vec{\sigma}'(s)$. Вначале покажем, что для любого единичного вектора $\vec{\sigma}(s)$ его производная есть вектор, перпендикулярный к $\vec{\sigma}(s)$. В самом деле, скалярное произведение $(\vec{\sigma}(s), \vec{\sigma}(s)) = 1$, так как длины у обоих векторов равны 1. Угол между ними равен нулю, поэтому $\cos 0 = 1$. Это соотношение продифференцируем по s , учитывая правило дифференцирования скалярного произведения векторных функций скалярного аргумента, и получим $(\vec{\sigma}'(s), \vec{\sigma}(s)) + (\vec{\sigma}(s), \vec{\sigma}'(s)) = 0$. Оба произведения слева равны друг другу, поэтому $(\vec{\sigma}'(s), \vec{\sigma}(s)) = 0$. В этом скалярном произведении $\vec{\sigma}(s)$ — единичный вектор. Будем считать, что его производная есть ненулевой вектор. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то они перпендикулярны. Итак, получили, что векторы $\vec{\sigma}(s)$ и $\vec{\sigma}'(s)$ перпендикулярны. Начало вектора $\vec{\sigma}'(s)$ поместим в точке M , как и начало $\vec{\sigma}(s)$. Ясно, что вектор $\vec{\sigma}'(s)$ лежит в нормальной плоскости к кривой в точке M .

Прямая, проходящая через точку M рассматриваемой кривой и имеющая направление вектора $\vec{\sigma}'(s)$, называется *главной нормалью* к кривой в точке M . На главной нормали возьмем единичный вектор $\vec{n}$, который имеет такое же направление, что и $\vec{\sigma}'(s)$. Следовательно, вектор $\vec{\sigma}'(s)$ можно получить умножением вектора $\vec{n}$ на длину вектора $\vec{\sigma}'(s)$. Но эта длина, согласно (8.40), равна K , поэтому

$$\vec{\sigma}'(s) = K \vec{n}. \quad (8.42)$$

Ясно, что для каждой точки M кривой, отвечающей значению параметра s , единичный вектор главной нормали $\vec{n}$ будет свой, как и $\vec{\sigma}'(s)$, т.е. $\vec{n}$ — это функция от s : $\vec{n} = \vec{n}(s)$.

§ 8.8. Соприкасающаяся плоскость кривой

Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в точке M кривой, называется *соприкасающейся плоскостью* этой кривой в точке M . При движении точки M по пространственной кривой положение соприкасающейся плоскости в пространстве изменяется (для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой, так как для плоской кривой вектор $\vec{\sigma}'(s)$ всегда лежит в плоскости кривой вместе с вектором $\Delta\vec{\sigma}$). В точке M_1 пространственной кривой, отвечающей значению $s + \Delta s$, соприкасающаяся плоскость будет отличаться от соприкасающейся плоскости в точке M , отвечающей значению параметра s . Двугранный угол между этими плоскостями обозначим $\Delta\mu$. Ясно, что чем больше $\Delta\mu$ для дуги $\widehat{MM_1}$ данной длины Δs , тем сильнее кривая отклоняется от плоской. Прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью* к кривой в точке M .

Возьмем вектор $\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n}$. Это единичный вектор, перпендикулярный к $\vec{\sigma}$ и $\vec{n}$, т.е. он направлен по бинормали. Кроме того, векторы $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ ориентированы так же, как и единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, лежащие на осях координат. Начала векторов $\vec{b}$, $\vec{\sigma}$ и $\vec{n}$ поместим в точку M . Понятно, что вектор $\vec{b}$ есть функция от s , т.е. $\vec{b} = \vec{b}(s)$. Продифференцируем по s вектор $\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n}$, получим

$$\vec{b}'_s = [\vec{\sigma}'_s \times \vec{n}] + [\vec{\sigma} \times \vec{n}'_s].$$

Согласно формуле (8.42) вектор $\vec{\sigma}'_s$ коллинеарен вектору $\vec{n}$, поэтому первое векторное произведение правой части полученной формулы равно нулю; следовательно, $\vec{b}'_s = \vec{\sigma} \times \vec{n}'_s$. Ясно, что вектор $\vec{b}'_s$ перпендикулярен вектору $\vec{\sigma}$, так как векторное произведение этих векторов перпендикулярно каждому из умножаемых векторов. Кроме того, так как $\vec{b}$ — единичный вектор, то по доказанному $\vec{b} \perp \vec{b}'_s$. Это

означает, что $\vec{b}'_s$ есть вектор, направленный по главной нормали, т. е. коллинеарный вектору $\vec{n}$. Следовательно, этот вектор можно получить умножением $\vec{n}$ на скалярную величину, которую обозначим κ . Итак,

$$\vec{b}'_s = \kappa \vec{n}. \quad (8.43)$$

Число κ называется *кручением кривой* в точке M . Ясно, что эта величина является функцией от s , так как для каждой точки M

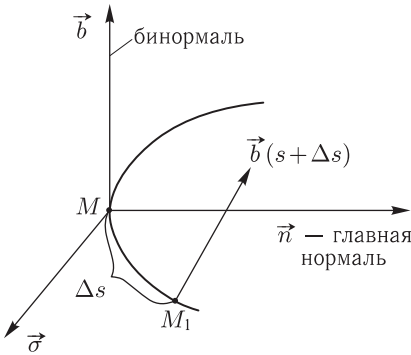


Рис. 8.12

она будет своя, как и кривизна K . Эта величина характеризует отклонение пространственной кривой от плоской. Вектор $\vec{b}(s + \Delta s)$ направлен по бинормали в точке M_1 , т. е. перпендикулярно соприкасающейся плоскости в точке M_1 (рис. 8.12). Поэтому двугранный угол $\Delta\mu$ между соприкасающимися плоскостями в точках M и M_1 равен углу между единичными векторами $\vec{b}(s)$ и $\vec{b}(s + \Delta s)$. Теперь, поступая, как и при выводе формулы (8.39), можно показать,

что $|\vec{b}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta\mu/\Delta s)$. Но, как видно из формулы (8.43), $|\vec{b}'(s)| = |\kappa|$. Сравнив это выражение с предыдущей формулой, получим $|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta\mu/\Delta s)$. Отсюда видно, что кручение κ является мерой отклонения кривой от плоской. В самом деле, чем больше кривая данной длины Δs отклоняется от плоской, тем больше $\Delta\mu$, тем больше отношение $\Delta\mu/\Delta s$, а следовательно, и предел этого отношения.

Для вычисления кручения справедлива формула

$$\kappa = -\frac{1}{K^2} (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s) \times \vec{r}'''(s)). \quad (8.44)$$

Чтобы получить ее, соотношение (8.43) умножим скалярно на $\vec{n}$, затем туда подставим выражение для $\vec{b}'_s$, равное $\vec{s} \times \vec{n}'_s$. Кроме того, учтем, что согласно (8.42) $\vec{n} = \vec{s}'_s/K = \vec{r}''_s/K$, поэтому $n'_s = (\vec{r}''_{ss}/K)'_s$. Формула (8.44) позволяет вычислить кручение кривой, заданной уравнением (8.28).

Пример. Винтовая линия задана уравнением

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + \frac{h}{2\pi} t \vec{k}. \quad (8.45)$$

Требуется найти ее кручение в произвольной точке.

Запишем уравнение этой линии в виде (8.28), где s — длина ее дуги, отсчитываемая в сторону возрастания t от точки $(a, 0, 0)$, отвечающей значению $t = 0$. Ясно, что длина дуги s есть функция параметра t : $s = s(t)$. Пусть $t = t(s)$ — функция, обратная к $s = s(t)$. Тогда

$$t'_s = \frac{1}{s'_t}. \quad (8.46)$$

Считая, что в уравнении (8.45) t есть функция $t = t(s)$, получим

$$\vec{r}'_s = -at'_s \sin t \vec{i} + at'_s \cos t \vec{j} + \frac{h}{2\pi} t'_s \vec{k}.$$

Отсюда с учетом (8.46) имеем

$$|\vec{r}'_s| = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + h^2/(4\pi^2)}}{s'_t}.$$

Но $|\vec{r}'_s| = 1$, поэтому $s'_t = c$, где $c = \sqrt{a^2 + h^2/(4\pi^2)}$. По формуле Лагранжа $s(t) - s(0) = s'_t(\theta)(t - 0)$, $0 < \theta < t$. Но $s'_t(\theta) = c$, $s(0) = 0$, поэтому $s = s(t) = ct$. Следовательно, исходное уравнение можно записать так:

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad \text{где} \quad \vec{r}(s) = a \cos \frac{s}{c} \vec{i} + a \sin \frac{s}{c} \vec{j} + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{s}{c} \vec{k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{r}'(s) &= -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} \vec{i} + \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} \vec{j} + \frac{h}{2\pi c} \vec{k}, \\ \vec{r}''(s) &= -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c} \vec{i} - \frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c} \vec{j}, \\ \vec{r}'''(s) &= \frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c} \vec{i} - \frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Согласно (8.41) найдем

$$K = \sqrt{\left(\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}\right)^2} = \frac{a}{c^2}.$$

Стоящее в формуле (8.44) произведение векторов есть смешанное произведение $(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))$, поэтому искомое кручение согласно (8.44) равно

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{K^2} (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)) = -\frac{c^4}{a^2} \begin{vmatrix} -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} & \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} & \frac{h}{2\pi c} \\ -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c} & -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c} & 0 \\ \frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{c^3 h}{2\pi a^2} \cdot \frac{a^2}{c^5} = -\frac{h}{2\pi c^2} = -\frac{h}{2\pi(a^2 + h^2/(4\pi^2))}. \end{aligned}$$

Глава 9

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 9.1. Функции двух переменных и способы их задания

Пусть M — некоторое множество пар (x, y) действительных чисел, N — некоторое множество действительных чисел z .

Функцией двух переменных x, y называется правило, согласно которому каждой паре чисел (x, y) из множества M отвечает одно определенное число z из множества N при условии, что каждому числу z из множества N отвечает хотя бы одна пара (x, y) из множества M . Числа x, y называют *аргументами*, или *независимыми переменными*, а z — *зависимой переменной*, или *функцией*. Множество M называют *областью определения функции*, а множество N — *областью значений* функции.

Функция обозначается $z = f(x, y)$, например, $z = x^2 + y^2$. Если конкретной паре аргументов $x = x_0, y = y_0$ отвечает определенное значение $z = z_0$ функции $z = f(x, y)$, то пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = z_0$.

Каждой паре чисел (x, y) на плоскости Oxy отвечает определенная точка $P(x, y)$, поэтому функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки P , при этом пишут $z = f(x, y) = f(P)$, помня, что P — точка с координатами x, y . Ясно, что

множеству M — области определения функции $z = f(x, y) = f(P)$ — на плоскости Oxy отвечает некоторое множество точек, которое также будем называть *областью определения функции*.

Пусть плоскость Oxy разбита простой (т.е. без точек самопересечения) замкнутой кривой L на две части: внутреннюю D и внешнюю (рис. 9.1). Каждую из этих частей называют *областью*, а кривую L —

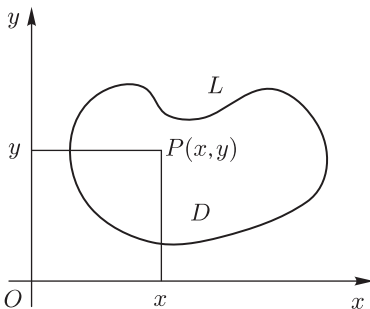


Рис. 9.1

границей области. Точки области, не лежащие на границе L , называются *внутренними точками области*, а точки границы — *граничными*. Если в область входят также все точки ее границы L , то эту область называют *замкнутой*. Область, из которой исключены все граничные точки, называется *открытой*.

Область называется *конечной (ограниченной)*, если все ее точки расположены на конечном расстоянии от начала координат. Например, область D , внутренняя для кривой L , является конечной, а область, внешняя по отношению к кривой L , — бесконечной. Другими примерами бесконечных областей служат вся плоскость Oxy и верхняя полуплоскость с осью Ox в качестве границы. В дальнейшем области, внешние к замкнутой кривой, не рассматриваются. Строгое математическое определение области мы не приводим.

Способы задания функции двух переменных. *Табличный способ* задания функции заключается в том, что значения функции задают с помощью таблицы. Например, таблица может иметь следующий вид: в первом столбце указывают ряд значений x , а в первой строке — ряд значений y . На пересечении строк и столбцов записывают соответствующие значения функции $f(x, y)$:

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\dots$	$f(x_1, y_m)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\dots$	$f(x_2, y_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$f(x_n, y_1)$	$f(x_n, y_2)$	$\dots$	$f(x_n, y_m)$

Аналитический способ задания функции — это способ задания функции с помощью формул. Пусть, например, функция двух переменных задана формулой

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (9.1)$$

Если функция $z = f(x, y)$ задана одной формулой, без указания области определения, то под областью определения понимают совокупность всех точек $P(x, y)$ плоскости Oxy , в которых по данной формуле можно найти соответствующее значение $z = f(x, y)$, т. е. для которых эта формула имеет смысл и позволяет найти соответствующее значение функции.

Найдем область определения функции, заданной формулой (9.1). Ясно, что в любой точке $P(x, y)$ значение рассматриваемой функции

можно найти, если для координат x, y этой точки выражение под корнем неотрицательно, т. е. $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, или

$$x^2 + y^2 \leq 1. \quad (9.2)$$

Поскольку $OP^2 = x^2 + y^2$, то неравенство (9.2) записывается в виде $OP^2 \leq 1$, или $OP \leq 1$. Таким образом, областью определения функции (9.1) служит множество точек P , расстояния которых до начала координат меньше или равно 1, т. е. круг с радиусом 1 и центром в начале координат (рис. 9.2). Для всех точек границы этого круга имеем $OP^2 = x^2 + y^2 = 1$, поэтому в этих точках $z = 0$, т. е. функция (9.1) определена также во всех точках границы области определения. Значит, последняя есть замкнутая область.

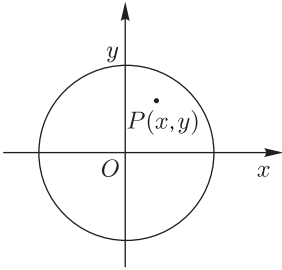


Рис. 9.2

§ 9.2. Геометрическое представление функции двух переменных

Пусть в области D плоскости Oxy пространства $Oxyz$ задана функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$. Через точку $P(x, y)$ области D проведем прямую, параллельную оси Oz (рис. 9.3). На этой

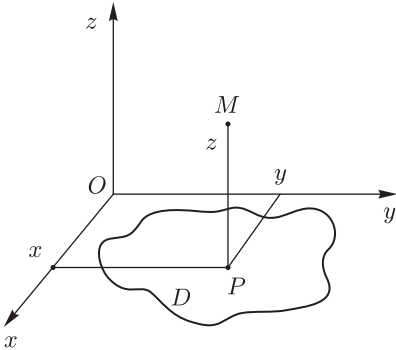


Рис. 9.3

прямой возьмем точку $M(x, y, z)$, абсцисса x и ордината y которой равны соответственно абсциссе x и ординате y точки P , а аппликата z равна значению $z = f(x, y) = f(P)$ функции в точке P . Это означает, что расстояние $PM = z = f(x, y)$ при $z > 0$, когда точка M лежит выше плоскости Oxy , и $PM = -z = -f(x, y)$ при $z < 0$, когда точка M лежит ниже плоскости Oxy (при $z = 0$ точка M лежит в плоскости Oxy и совпадает с точкой P). Такое построение выполним для всех точек

$P(x, y)$ области D . Тогда в пространстве получим множество точек $M(x, y, z)$. Как правило будем рассматривать функции, для которых это множество образует некоторую сплошную поверхность. Эту поверхность будем называть *графиком* рассматриваемой функции $z = f(x, y)$.

По построению координаты x , y , z любой точки M этой поверхности удовлетворяют соотношению $z = f(x, y)$, следовательно, последнее соотношение является уравнением этой поверхности. Таким образом, график функции есть геометрическое место точек (x, y, z) , удовлетворяющих соотношению $z = f(x, y)$.

Итак, мы показали, что каждой функции двух переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $Oxyz$ отвечает поверхность с уравнением $z = f(x, y)$. Это и есть геометрическое истолкование функции двух переменных.

Например, функции, определенной формулой (9.1), в пространстве $Oxyz$ отвечает верхняя часть сферы радиуса $r = 1$ с центром в начале координат. В самом деле, согласно (9.1) $z \geq 0$, т. е. поверхность расположена выше плоскости Oxy , а возведя (9.1) в квадрат, получим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Это означает, что координаты любой точки рассматриваемой поверхности, отвечающей функции (9.1), удовлетворяют последнему уравнению. Отметим, что указанная часть сферы включает в себя и свою границу — окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

§ 9.3. Функции трех и большего числа переменных. Частное и полное приращения функции

Аналогично предыдущему можно ввести понятия функций трех и большего числа переменных. Например, функции трех переменных обозначаются $U = f(x, y, z)$. Мы знаем, что в пространстве $Oxyz$ тройке чисел x, y, z отвечает точка $P(x, y, z)$. Поэтому $U = f(x, y, z)$ можно рассматривать как функцию точки P и писать $U = f(x, y, z) = f(P)$. Как правило, будем рассматривать функции трех переменных, для которых областью определения служит некоторая конечная область — часть пространства $Oxyz$, ограниченная замкнутой поверхностью (например, сферой). Эту поверхность называют *границей области*. Определения конечной и замкнутой областей такие же, что и в § 9.1.

Функцию n переменных будем обозначать $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — аргументы функции. Мы знаем, что в n -мерном пространстве каждой совокупности n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ отвечает точка P , для которой эти числа являются координатами. Поэтому функцию n переменных можно рассматривать как функцию $U = f(P)$ этой точки P в n -мерном пространстве. Функции трех и большего числа переменных геометрического истолкования не имеют.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть из двух аргументов этой функции второй аргумент y — постоянная, а первый аргумент x изменяется и получает приращение Δx . Тогда соответству-

ющее приращение функции обозначается $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и называется *частным приращением по x* функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) , соответствующим приращению Δx .

Пусть теперь $x = \text{const}$, а y изменяется и получает приращение Δy . Тогда соответствующее приращение функции обозначается $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ и называется *частным приращением по y* функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) , соответствующим приращению Δy .

Пусть, наконец, оба аргумента x, y изменяются и получают соответственно приращения $\Delta x, \Delta y$. Тогда выражение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется *полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y)* , соответствующим приращениям $\Delta x, \Delta y$. Аналогично определяются частное и полное приращения функции трех и большего числа переменных.

Рассмотрим функцию n переменных $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть изменяется только x_1 и получает приращение Δx_1 , а все остальные аргументы остаются постоянными. Тогда эта функция получает частное приращение по x_1 , равное

$$\Delta_{x_1} U = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если аналогично изменяются все аргументы этой функции, то получаем ее полное приращение

$$\Delta U = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

§ 9.4. Предел функции

Пусть в некоторой области D плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y) = f(P)$, $P_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка области D , x_0, y_0 — заданные числа, а $P(x, y)$ — переменная точка этой области. Положим, что точка P стремится к точке P_0 произвольно. Пусть при этом значение функции в точке P стремится к некоторому значению b в том смысле, что $|f(P) - b| \rightarrow 0$. В этом случае число b называют пределом функции $f(P)$. Чтобы дать строгое определение предела, введем следующие понятия.

Окрестностью точки P_0 называется внутренность круга с центром в точке P_0 . Если радиус круга равен δ , то окрестность называют δ -окрестностью точки P_0 (рис. 9.4). Ясно, что для любой точки $P(x, y)$ δ -окрестности точки P_0 расстояние от точки P до точки P_0 меньше δ , т. е. $PP_0 < \delta$, или $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Теперь можно записать строгое определение вышеуказанного предела.

Число b называется *пределом функции* $z = f(x, y) = f(P)$ при $P(x, y)$, стремящемся к $P_0(x_0, y_0)$, если для любого положительного числа ε , каким бы малым оно ни было, найдутся такое положительное число δ и соответствующая δ -окрестность точки P_0 , что для всех точек $P(x, y)$ этой окрестности (за исключением, возможно, точки P_0) выполняется неравенство

$$|f(P) - b| < \varepsilon, \quad \text{или} \quad |f(x, y) - b| < \varepsilon. \quad (9.3)$$

В этом случае будем писать $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$.

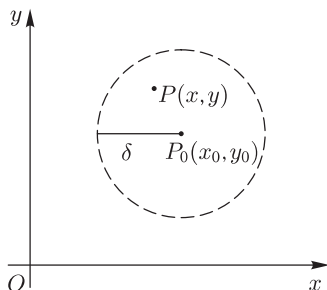


Рис. 9.4

Из приведенного определения ясно, что речь идет о пределе функции $z = f(x, y) = f(P)$, когда точка $P(x, y)$ стремится к $P_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, так как (9.3) выполняется для всех точек $P(x, y)$ δ -окрестности точки P_0 . Если предел функции $f(P)$ при $P \rightarrow P_0$ равен нулю, то $f(P)$ называют *бесконечно малой функцией* при $P \rightarrow P_0$. Легко проверить, например, что функция $z = x^2 + y^2$ является бесконечно малой при $P(x, y) \rightarrow P_0(0, 0)$, т. е. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (x^2 + y^2) = 0$.

Замечание. Согласно определению предела функции неравенства (9.3) должны выполняться для всех точек $P(x, y)$ из δ -окрестности точки P_0 . В противном случае функция предела не имеет. Возьмем, например, функцию $z = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ и рассмотрим ее поведение при $P(x, y) \rightarrow P_0(0, 0)$. В любой окрестности точки P_0 для всех точек, лежащих на оси Ox , для которых $y = 0$, имеем $z = 1$. Для всех точек оси Oy этой окрестности, для которых $x = 0$, получаем $z = -1$. Таким образом, каким бы ни было число b , неравенство (9.3) не может выполняться для всех точек δ -окрестности точки P_0 . Это и означает, что указанная функция при $P \rightarrow P_0$ предела не имеет.

Определения предела функции трех и большего числа переменных аналогичны определению предела для функции двух переменных. Нужно только ввести понятие окрестности точки P_0 . Сделаем это для случая функции n переменных $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Введем n -мерное пространство, в котором возьмем переменную точку с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть в n -мерном пространстве P_0 — фиксированная точка. Ее координаты обозначим $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, где $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ — заданные числа; δ -окрестностью точки P_0 в этом n -мерном пространстве будем называть множество всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, таких, что

расстояние от P до P_0 меньше δ , т. е. $PP_0 < \delta$. Иначе говоря,

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta.$$

Для предела функции многих переменных справедливы все теоремы, доказанные для предела функции одной переменной. Они формулируются и доказываются аналогично.

§ 9.5. Непрерывность, точки и линии разрыва функций

Функция многих переменных $U = f(P)$ называется *непрерывной в точке P_0* , если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0). \quad (9.4)$$

Это означает, что:

- существует $f(P_0)$, т. е. функция $f(P)$ определена в точке P_0 и всюду в ее малой окрестности;
- существует предел $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$;
- этот предел равен значению функции $f(P_0)$.

Для непрерывных функций многих переменных справедливы теоремы о непрерывности алгебраической суммы, произведения, частного непрерывных функций, а также теорема о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций, доказанные ранее для функций одной переменной. Эти теоремы формулируются и доказываются аналогично случаю функций одной переменной. Условие (9.4) для функций двух переменных, например, можно записать, выделив аргументы следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (9.5)$$

где x_0, y_0 — координаты точки P_0 , x, y — координаты точки P , стремящейся к точке P_0 , $f(x_0, y_0)$ — постоянная. Но предел постоянной равен этой постоянной, т. е. $f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x_0, y_0)$. Этот предел

подставим в правую часть выражения (9.5), затем предел перенесем влево и разность пределов в левой части запишем как предел разности:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. Тогда $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Таким образом, получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Здесь выражение в квадратных скобках есть полное приращение Δz функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , так что формула принимает окончательно вид $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$.

Таким образом, если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0, y_0)$, то полное приращение Δz этой функции в точке P_0 , соответствующее приращениям Δx , Δy , стремится к нулю, когда $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ одновременно. Это утверждение справедливо и для функций трех и большего числа переменных. Его можно принять за второе определение непрерывности функции в точке.

Точка P_0 называется *точкой разрыва функции* $U = f(P)$ многих переменных, если в этой точке нарушается хотя бы одно из трех вышеприведенных условий непрерывности. Таких точек разрыва может быть несколько и даже бесконечное множество. В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ такие точки разрыва могут образовывать на плоскости Oxy даже линии. Эти линии называются *линиями разрыва функции двух переменных* $z = f(x, y)$ (для функции трех переменных $U = f(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ точки разрыва могут образовывать поверхности разрыва). Например, для функции двух переменных $z = 1/(y - x)$ линией разрыва на плоскости Oxy служит прямая $y = x$. В самом деле, для всех точек этой прямой имеем $y - x = 0$, и в них функция z не определена, т. е. нарушается первое условие в определении непрерывности функции.

§ 9.6. Свойства функций, непрерывных в конечной (ограниченной) замкнутой области

Функция $U = f(P)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. В частности, функция называется *непрерывной в замкнутой области*, если она непрерывна во всех точках области, включая точки границы области (§ 9.1).

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Если функция непрерывна в замкнутой конечной (ограниченной) области, то:*

- по крайней мере в одной точке P_1 области она принимает свое наибольшее значение $M = f(P_1)$, удовлетворяющее условию $f(P_1) \geq f(P)$ для всех точек P области, и по крайней мере в одной точке P_2 области эта функция принимает наименьшее значение $m = f(P_2)$, удовлетворяющее для всех точек P области условию $f(P_2) \leq f(P)$;
- любое значение μ , заключенное между m и M , функция принимает по крайней мере в одной точке области.

Проиллюстрируем эту теорему на примере функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (9.6)$$

Она определена в замкнутой конечной области — круге радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.

Граница круга входит в область определения. График этой функции — верхняя часть сферы радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.

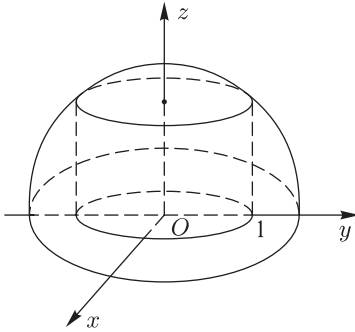


Рис. 9.5

Функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точке $O(0, 0)$. В самом деле, как видно из формулы (9.6), во всех остальных точках значения функции будут меньше 1, так как $1 - x^2 - y^2 < 1$. Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает в точках границы области определения — на окружности с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Любое значение μ , $0 \leq \mu \leq 1$, эта функция принимает в точках (x, y) , для которых z в формуле (9.6) равно μ , т. е. $\mu = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, или $x^2 + y^2 = 1 - \mu^2$. Эти точки образуют окружность с центром в начале координат $(0, 0)$ и радиусом $r = \sqrt{1 - \mu^2}$ (рис. 9.5).

§ 9.7. Частные производные

Дана функция $z = f(x, y)$. Частной производной по x этой функции называется ее производная по x , вычисленная в предположении, что $y = \text{const}$. Эта частная производная по x обозначается z'_x , либо $\partial z / \partial x$, либо $f'_x(x, y)$, либо $\partial f(x, y) / \partial x$. Поскольку мы считаем, что y остается постоянной, то получим функцию $z = f(x, y)$ одного аргумента x . Указанную производную определим известным способом — для данного приращения Δx возьмем приращение рассматриваемой функции. Оно будет частным приращением по x , так как $y = \text{const}$: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Согласно определению производной

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \quad (9.7)$$

Частной производной по y функции $z = f(x, y)$ называется ее производная по y , вычисленная в предположении, что x остается по-

стоянной. Эта производная обозначается z'_y , либо $\partial z / \partial y$, либо $f'_y(x, y)$, либо $\partial f(x, y) / \partial y$ и по аналогии с предыдущим определяется формулой

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \quad (9.8)$$

где

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (9.9)$$

Аналогично определяются частные производные функций n переменных.

Пусть дана функция n переменных $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предположим, что изменяется, например, только x_1 , а все остальные аргументы остаются постоянными. Тогда мы можем вычислить частную производную по x_1 этой функции

$$U'_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} U}{\Delta x_1}.$$

Пример. Найти частные производные функции $z = x^y$.

Частная ее производная по x вычисляется в предположении, что $y = \text{const}$. Тогда получим степенную функцию вида x^n , поэтому $z'_x = yx^{y-1}$. Частная производная по y этой функции берется при $x = \text{const}$, т. е. мы получим показательную функцию вида a^y , следовательно, $z'_y = x^y \ln x$.

§ 9.8. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Дана функция $z = f(x, y)$, ей в пространстве $Oxyz$ соответствует поверхность (рис. 9.6), для простоты считаем, что $f(x, y) > 0$. Через произвольную точку x оси Ox проведем плоскость перпендикулярно Ox . Она пересекает поверхность $z = f(x, y)$ по линии l_y , а плоскость Oxy — по прямой PP_1 . Все точки этой плоскости имеют одну и ту же абсциссу x . Пусть (x, y) — координаты точки P , а точка P_1 имеет координаты $(x, y + \Delta y)$. Рассмотрим случай, когда $\Delta y > 0$. В точке $P(x, y)$ найдем значение заданной функции $f(x, y)$. Это значение равно PM — расстоянию от точки P до точки M поверхности. Значение $f(x, y + \Delta y)$ заданной функции в точке P_1 равно P_1M_1 — расстоянию от точки P_1 до точки M_1 поверхности. Разность этих значений $f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta_y z$ есть частное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$, соответствующее приращению Δy . Это значение равно расстоянию KM_1 .

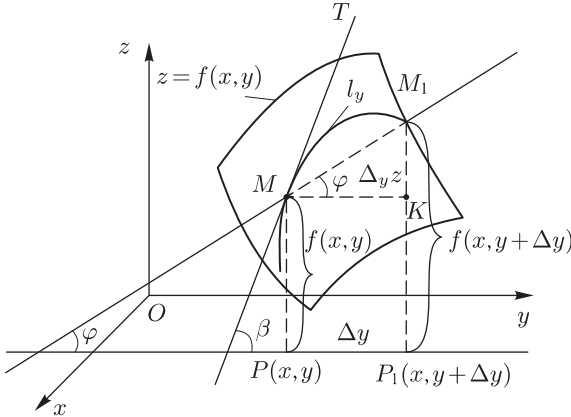


Рис. 9.6

Пусть φ — угол, образованный секущей MM_1 линии l_y с прямой PP_1 (или с осью Oy , так как последняя параллельна прямой PP_1). Из рис. 9.6 видно, что

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.10)$$

При $\Delta y \rightarrow 0$ точка M_1 стремится к точке M по кривой l_y , секущая MM_1 стремится к положению касательной MT к кривой l_y в точке M , а φ стремится к β — углу, образованному этой касательной с прямой PP_1 , т. е. с осью Oy . Перейдя в (9.10) к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\varphi \rightarrow \beta} \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.11)$$

Но $\operatorname{tg} \varphi$ — непрерывная функция при $0 < \varphi < \pi/2$, поэтому $\lim_{\varphi \rightarrow \beta} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \beta$. Подставим последнее выражение в правую часть (9.11) и учтем, что левая часть (9.11), согласно (9.8), равна z'_y ; следовательно, $z'_y = \operatorname{tg} \beta$.

Итак, частная производная по y от функции $z = f(x, y)$ равна тангенсу угла β , образованного с осью Oy касательной к линии l_y в ее точке M . Аналогично устанавливается геометрический смысл частной производной по x функции $z = f(x, y)$.

§ 9.9. Полный дифференциал

Дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Будем считать, что она имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке (x, y) . Мы знаем, что полное приращение определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (9.12)$$

В правой части этой формулы прибавим и вычтем $f(x, y + \Delta y)$. Получим

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (9.13)$$

Разность $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ двух значений функции $f(x, y)$ при одном и том же x можно записать по формуле Лагранжа (6.6), считая в нашем случае $b = y + \Delta y$, $a = y$, а вместо $f'(c)$ берется частная производная f'_y в точке $\bar{y}$, лежащей между y и $y + \Delta y$. Получим

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (9.14)$$

Для первой разности в правой части (9.13) (при фиксированном $y + \Delta y$) запишем аналогично

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x.$$

Здесь $\bar{x}$ — точка, лежащая между x и $x + \Delta x$. Это выражение и выражение (9.14) подставим в (9.13), будем иметь

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (9.15)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, очевидно, $x + \Delta x \rightarrow x$, $y + \Delta y \rightarrow y$, поэтому $\bar{x} \rightarrow x$ и $\bar{y} \rightarrow y$. При этом, так как частные производные в правой части (9.15) непрерывны в точке (x, y) по условию, пределы этих производных равны их значениям в предельной точке, т. е.

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow x \\ y + \Delta y \rightarrow y}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Из теории пределов известно, что функцию можно представить в виде суммы ее предела и бесконечно малой функции, поэтому

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \quad \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2,$$

где γ_1 , γ_2 — бесконечно малые функции, стремящиеся к нулю при Δx и Δy , одновременно стремящихся к нулю. Теперь (9.15) можно записать так:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y. \quad (9.16)$$

Обозначим $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Последнее выражение возведем в квадрат и затем поделим на $(\Delta r)^2$: $(\Delta x/\Delta r)^2 + (\Delta y/\Delta r)^2 = 1$, или $|\Delta x/\Delta r|^2 + |\Delta y/\Delta r|^2 = 1$. Отсюда видно, что $|\Delta x/\Delta r| \leq 1$ и $|\Delta y/\Delta r| \leq$

≤ 1 , так как сумма квадратов этих выражений равна 1. Очевидно, величины $\Delta x/\Delta r$ и $\Delta y/\Delta r$ являются ограниченными функциями от $\Delta x, \Delta y$, в частности, при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ одновременно.

Покажем, что предел $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} [(\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y)/\Delta r] = 0$. В самом деле, $\Delta x/\Delta r$ — ограниченная функция, а γ_1 — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ одновременно. Но произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции есть бесконечно малая функция, следовательно, $(\Delta x/\Delta r) \cdot \gamma_1$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ одновременно. Аналогично $(\Delta y/\Delta r) \cdot \gamma_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Значит, $(\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y)/\Delta r$ также есть бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ одновременно. Таким образом, сумма $\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δr , при $\Delta r \rightarrow 0$ (образно говоря, эта сумма стремится к нулю «быстрее», чем Δr).

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке (x, y)* , если для ее полного приращения справедлива формула (9.16), в которой сумма $\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δr . При этом сумма первых двух слагаемых в правой части (9.16) называется *полным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ и обозначается dz . Итак, полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ определяется формулой

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (9.17)$$

В силу последнего обозначения соотношение (9.16) примет вид

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y. \quad (9.18)$$

В случае, когда функция $z = f(x, y) = x$, имеем $dz = dx$. При этом $f'_x(x, y) = 1$, $f'_y(x, y) = 0$ и $dx = \Delta x$. Совершенно аналогично, взяв $z = f(x, y) = y$, получим, что $dy = \Delta y$. Иначе говоря, приращения независимых переменных равны их полным дифференциалам, и в формуле (9.17) можно взять dx вместо Δx и dy вместо Δy . Из равенства (9.16) следует, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал (9.17).

Рассмотрим функцию $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных. Ее полное приращение

$$\Delta U = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Полный дифференциал этой функции определяется формулой, аналогичной (9.17):

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Пусть теперь функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам $x_1, x_2, \dots, x_n$ в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного пространства. Тогда, поступая так же, как и в случае функции двух переменных при выводе формулы (9.16), можно показать, что $\Delta U = dU + \gamma_1 \cdot \Delta x_1 + \gamma_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \gamma_n \cdot \Delta x_n$, где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — бесконечно малые функции, когда стремится к нулю величина

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}.$$

§ 9.10. Применение полного дифференциала функции в приближенных вычислениях

Для полного приращения функции $z = f(x, y)$ мы получили формулу (9.18), в которой $\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δr , когда $\Delta r \rightarrow 0$. Это означает, что при малых значениях $\Delta x, \Delta y$ сумма $\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y$ будет значительно меньше, чем Δr , поэтому указанной суммой можно пренебречь. В результате получим приближенное соотношение

$$\Delta z \approx dz, \quad (9.19)$$

т. е. при малых $\Delta x, \Delta y$ полное приращение функции Δz можно приближенно заменить полным дифференциалом dz этой функции. Это свойство используется в приближенных вычислениях. В формулу (9.19) подставим выражение (9.12) для Δz и выражение (9.17) для dz и получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Эта формула позволяет вычислить приближенное значение функции $f(x, y)$ в «новой» точке $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, зная значения самой функции и ее частных производных в «старой» точке (x, y) . Запишем последнюю формулу для функции $z = f(x, y) = x^y$:

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + y \cdot x^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \cdot \ln x \cdot \Delta y.$$

Пример. Необходимо вычислить приближенно величину $(1,01)^{1,02}$. Положим $x = 1, y = 1, \Delta x = 0,01, \Delta y = 0,02$. Получим

$$(1,01)^{1,02} \approx 1^1 + 1 \cdot 1^0 \cdot 0,01 + 1^1 \cdot \ln 1 \cdot 0,02 \approx 1 + 0,01 = 1,01.$$

§ 9.11. Производная сложной функции

Дана функция

$$z = F(U, V), \quad (9.20)$$

в которой аргументы U, V в свою очередь являются функциями переменных x, y , т. е.

$$U = \varphi(x, y), \quad V = \psi(x, y). \quad (9.21)$$

Это означает, что в конечном счете z является функцией переменных x, y :

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (9.22)$$

Иначе говоря, z является сложной функцией от x, y . Нужно найти частные производные z'_x, z'_y этой функции, не выражая z через x, y , т. е. не переходя к (9.22), а имея лишь исходные функции (9.20) и (9.21). Будем считать, что функции (9.20), (9.21) имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Пусть $y = \text{const}$, а изменяется только x , получая приращение Δx . Тогда функции $U = \varphi(x, y)$, $V = \psi(x, y)$ получают частные приращения

$$\begin{aligned} \Delta_x U &= \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y), \\ \Delta_x V &= \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Так как $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные, то для $\Delta_x U$ и $\Delta_x V$ справедливы представления, аналогичные (9.16), поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ будем иметь $\Delta_x U \rightarrow 0$ и $\Delta_x V \rightarrow 0$.

Приращениям $\Delta_x U$ и $\Delta_x V$ аргументов U и V функции $z = F(U, V)$ отвечает полное приращение Δz этой функции, которое мы можем записать по формуле, аналогичной (9.16), в силу непрерывности частных производных от функции $z = F(U, V)$. Для этого в (9.16) заменим $f, x, y, \Delta x, \Delta y$ на $F, U, V, \Delta_x U, \Delta_x V$ соответственно. Получим

$$\Delta z = \frac{\partial F(U, V)}{\partial U} \cdot \Delta_x U + \frac{\partial F(U, V)}{\partial V} \cdot \Delta_x V + \gamma_1 \cdot \Delta_x U + \gamma_2 \cdot \Delta_x V, \quad (9.24)$$

здесь $\gamma_1 \rightarrow 0$, $\gamma_2 \rightarrow 0$ при $\Delta_x U \rightarrow 0$, $\Delta_x V \rightarrow 0$. Но формула (9.24) получена в предположении, что $y = \text{const}$, поэтому Δz — частное приращение по x этой функции z , зависящей от x, y , т. е. в данном случае $\Delta z = \Delta_x z$. Подставим $\Delta_x z$ вместо Δz в (9.24) и поделим полученное соотношение на Δx , тогда будем иметь

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F(U, V)}{\partial U} \cdot \frac{\Delta_x U}{\Delta x} + \frac{\partial F(U, V)}{\partial V} \cdot \frac{\Delta_x V}{\Delta x} + \gamma_1 \cdot \frac{\Delta_x U}{\Delta x} + \gamma_2 \cdot \frac{\Delta_x V}{\Delta x}. \quad (9.25)$$

Но при $\Delta x \rightarrow 0$ величины $\Delta_x U$, $\Delta_x V$, γ_1 , γ_2 стремятся к нулю. Перейдем в соотношении (9.25) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Предел правой части будет равен сумме пределов слагаемых, а каждый из последних пределов равен произведению пределов сомножителей. Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x V}{\Delta x} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Производную $\partial z/\partial y$ найдем, поступив аналогично. Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F(U, V)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F(U, V)}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F(U, V)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial F(U, V)}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial y}. \end{cases} \quad (9.26)$$

Формулы (9.26) позволяют вычислить производные сложной функции z , зависящей от x, y , когда эта функция задается формулами (9.20), (9.21).

Пример 1. Дана сложная функция $z = e^U \sin V$, где $U = x \cdot y$, $V = x^2 + y^2$. По формулам (9.26) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^U \cdot \sin V \cdot y + e^U \cdot \cos V \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^U \cdot \sin V \cdot x + e^U \cdot \cos V \cdot 2y.$$

Пусть теперь в формуле (9.20) U и V зависят лишь от x , т. е.

$$z = F(U, V), \quad U = \varphi(x), \quad V = \psi(x). \quad (9.27)$$

Здесь U, V — функции одного аргумента x , поэтому в конечном счете z тоже будет функцией одного аргумента x . При этом для производной по x остается в силе первая формула (9.26) (так как все предыдущие утверждения сохраняют силу), но только производные по x функций U, V, z будут не частными, а обычными производными. В результате будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F(U, V)}{\partial U} \cdot \frac{dU}{dx} + \frac{\partial F(U, V)}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dx}. \quad (9.28)$$

Пусть в (9.27) $U = x$, т. е.

$$z = F(x, V), \quad V = \psi(x). \quad (9.29)$$

Тогда для производной z'_x формула (9.28) примет вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F(x, V)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, V)}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dx}. \quad (9.30)$$

Заметим, что в этой формуле слева стоит *полная производная* dz/dx , а справа — *частная производная* $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$.

Пример 2. Дана функция $z = x^2 + e^V$, $V = \cos x$. По формуле (9.30) имеем $dz/dx = 2x + e^V(-\sin x) = 2x + e^{\cos x}(-\sin x)$.

Если $z = F(U_1, U_2, \dots, U_n)$, $U_1 = \varphi_1(x)$, $U_2 = \varphi_2(x), \dots, U_n = \varphi_n(x)$, то, поступив аналогично предыдущему, придем к формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial U_1} \cdot \frac{dU_1}{dx} + \frac{\partial F}{\partial U_2} \cdot \frac{dU_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F}{\partial U_n} \cdot \frac{dU_n}{dx}.$$

§ 9.12. Дифференцирование функций, заданных неявно

Дано соотношение

$$F(x, y) = 0, \quad (9.31)$$

в котором $F(x, y)$ есть известное выражение, содержащее x, y . Это соотношение определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$. Нужно найти производную y'_x этой функции. Запишем соотношение (9.31), обозначив левую часть через t : $t = F(x, y) = 0$, где $y = \varphi(x)$. Возьмем производную по x от функции $t = F(x, y)$, в которой $y = \varphi(x)$, при этом учтем, что t — функция от x . Запишем эту производную по формуле (9.30), заменив V на y и z на t :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Так как $t = 0$ при любом x , то и ее производная будет тождественно равна нулю, т. е. $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. Отсюда найдем производную

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}. \quad (9.32)$$

Эту формулу с помощью других символов производной можно записать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (9.33)$$

Рассмотрим теперь функцию z двух переменных x и y , заданную неявно соотношением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (9.34)$$

Нам необходимо найти частные производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, зная лишь (9.34). В соотношении (9.34) положим $y = \text{const}$. Тогда функция z будет зависеть лишь от x . Таким образом, мы оказываемся в той же ситуации, что и ранее (когда было задано соотношение (9.31)), только теперь роль y играет z , так как z — функция от x . Производную z'_x можем вычислить по формуле (9.32), в которой вместо y должны взять z . Получим $z'_x = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$, но производная z'_x здесь — частная производная, так как считаем, что $y = \text{const}$. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}. \quad (9.35)$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \quad (9.36)$$

В формулах (9.35) и (9.36) в правых частях можно использовать и другие обозначения частных производных, тогда получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (9.37)$$

Здесь в правой части z есть значение, отвечающее паре x, y согласно (9.34).

Пример. Пусть z — функция двух переменных, заданная соотношением

$$e^{xy} + 2z - 2 + e^z = 0. \quad (9.38)$$

Здесь $F(x, y, z) = e^{xy} + 2z - 2 + e^z$. По формулам (9.35) и (9.36) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{xy} \cdot y}{2 + e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{xy} \cdot x}{2 + e^z}.$$

Найдем, например, значение $\partial z / \partial x$ при $x = 0$ и $y = 0$. Как видно из (9.38), паре чисел $x = 0, y = 0$ отвечает $z = 0$, поэтому

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\left. \frac{e^{xy} \cdot y}{2 + e^z} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=0}} = 0.$$

§ 9.13. Частные производные высших порядков

Дана функция $z = f(x, y)$. Пусть она имеет частные производные $\partial z / \partial x = f'_x(x, y)$, $\partial z / \partial y = f'_y(x, y)$, при этом каждая из них в свою очередь есть функция от x и y . Например, $z = x^3 y^3$, $\partial z / \partial x = 3y^3 x^2$, $\partial z / \partial y = 3x^3 y^2$. Поэтому от каждой из указанных частных производных в свою очередь можно взять частные производные как по x , так и по y , если они существуют. Эти производные называются *вторыми частными производными*, или *частными производными второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ и обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = z''_{x^2} = f''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = z''_{y^2} = f''_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}.$$

В последних обозначениях на первом месте пишется та переменная, по которой вначале проводится дифференцирование.

В качестве примера найдем вторые производные функции $z = x^3 y^3$. Сначала находим $z'_x = 3x^2 y^3$, $z'_y = 3x^3 y^2$, отсюда $z''_{xx} = 6xy^3$, $z''_{yy} = 6x^3 y$, $z''_{xy} = 9x^2 y^2$, $z''_{yx} = 9x^2 y^2$.

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются *смешанными производными* функции $z = f(x, y)$. В рассматриваемом примере $f''_{xy} = f''_{yx}$, и это, оказывается, не случайно.

Теорема 9.2. Если для функции $z = f(x, y)$ ее смешанные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ непрерывны, то они равны друг другу, т. е. $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Принимается без доказательства.

Поскольку вторые частные производные функции $z = f(x, y)$ в свою очередь являются функциями от x и y , от них можно снова взять частные производные как по x , так и по y , если они существуют. Продолжив этот процесс, можем найти производные любого n -го порядка этой функции. Они обозначаются $\partial^n z / \partial x^n$ (когда мы дифференцируем n раз по x). Если вначале $(n - k)$ раз дифференцируем по x , а затем k раз — по y , то обозначаем это как $\partial^n z / (\partial x^{n-k} \partial y^k)$. Если дифференцируем вначале k раз по x , а затем $(n - k)$ раз — по y , то получим $\partial^n z / (\partial x^k \partial y^{n-k})$. Если дифференцируем n раз по y , то пишем $\partial^n z / \partial y^n$.

§ 9.14. Экстремумы. Необходимые признаки экстремума функции двух переменных

Пусть (x_0, y_0) — внутренняя точка области определения функции $f(x, y)$. Точка (x_0, y_0) называется *точкой максимума* функции $z = f(x, y)$, если значение функции в этой точке больше ее значений в любой отличной от (x_0, y_0) точке (x, y) некоторой малой окрестности точки (x_0, y_0) , т. е. $f(x_0, y_0) > f(x, y)$. График функции для точек, близких к точке (x_0, y_0) , может, например, иметь вид, показанный на рис. 9.7.

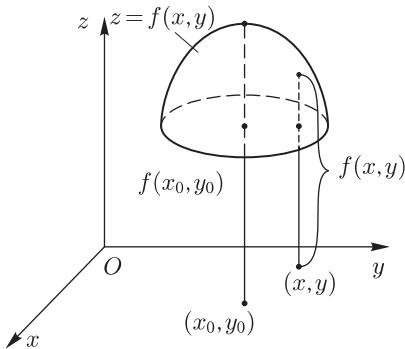


Рис. 9.7

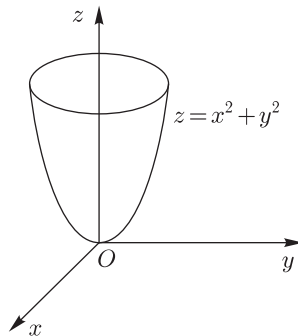


Рис. 9.8

Точка (x_0, y_0) называется *точкой минимума* функции, если значение функции в этой точке меньше ее значений в любой отличной от (x_0, y_0) точке (x, y) некоторой малой окрестности точки (x_0, y_0) , т. е. $f(x_0, y_0) < f(x, y)$. График этой функции для точек, непосредственно близких к (x_0, y_0) , может иметь, в частности, форму чаши с дном, обращенным вниз. Например, $(0, 0)$ — точка минимума функции $z = x^2 + y^2$. В самом деле, значение функции в этой точке меньше ее значений в любой другой точке (x, y) . График этой функции представлен на рис. 9.8.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции, а значения функции в них — *экстремальными значениями* (минимальными и максимальными).

Теорема 9.3. Если (x_0, y_0) — точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке производные $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ равны нулю или не существуют.

Доказательство. То, что (x_0, y_0) есть точка экстремума функции $z = f(x, y)$, означает, что при фиксированном $y = y_0$ $z = f(x, y_0)$ — функция одного переменного x — в точке $x = x_0$ имеет экстремум. Следовательно, согласно необходимому признаку экстремума функции одной переменной, производная $z'_x = f'_x(x, y_0)$ в точке $x = x_0$ равна нулю или не существует. Однако последняя производная является частной производной по x от функции $z = f(x, y)$, так как $y = y_0$. Итак, $\partial z / \partial x = \partial f(x, y_0) / \partial x$ при $x = x_0$ обращается в нуль или не существует, следовательно, частная производная $\partial f(x, y) / \partial x|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ обращается в нуль или не существует. Аналогично можно показать, что частная производная $\partial f(x, y) / \partial y|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ равна нулю или не существует.

Пример. Функция $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ имеет минимум в начале координат, и ее частные производные $\partial f(x, y) / \partial x = 2x$, $\partial f(x, y) / \partial y = 2y$ обращаются в нуль в точке $(0, 0)$.

Точки, в которых обе частные производные функции $z = f(x, y)$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими точками*. Согласно предыдущей теореме точка экстремума функции $z = f(x, y)$ является ее критической точкой. В то же время не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Например, для функции $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ имеем $\partial f(x, y) / \partial x = 2x$, $\partial f(x, y) / \partial y = -2y$. Обе эти производные в точке $(0, 0)$ обращаются в нуль, но она не является точкой экстремума рассматриваемой функции. В самом деле, эта функция в точке $(0, 0)$ принимает значение, равное нулю. Но это значение не является экстремальным, так как для всех точек оси Ox , для которых $y = 0$, функция принимает значения

$z = x^2 > 0$, а для всех точек оси Oy , для которых $x = 0$, функция принимает значения $z = -y^2 < 0$. Иначе говоря, рассматриваемая функция вблизи точки $(0, 0)$ принимает значения как большие, так

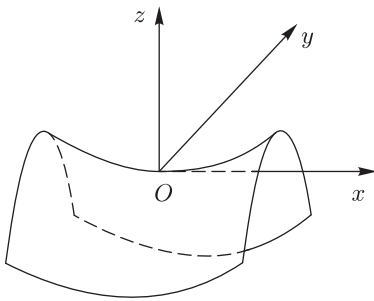


Рис. 9.9

и меньшие нуля. Поэтому ее значение в точке $(0, 0)$, равное нулю, не является ни максимальным, ни минимальным. Это очевидно геометрически, так как график рассматриваемой функции является гиперболическим параболоидом (рис. 9.9).

На вопрос, будет ли критическая точка точкой экстремума, отвечает достаточный признак экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$.

§ 9.15. Достаточный признак экстремума. Схема исследования на экстремум функции двух переменных

Теорема 9.4. Пусть (x_0, y_0) — критическая точка функции $z = f(x, y)$, причем $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$, $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$. Обозначим:

$$A = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad B = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad C = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Тогда:

- если $AC - B^2 > 0$, то (x_0, y_0) есть точка экстремума функции $z = f(x, y)$, а именно точка максимума при $A < 0$ и точка минимума при $A > 0$;
- если $AC - B^2 < 0$, то (x_0, y_0) не является точкой экстремума;
- если $AC - B^2 = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Теорема принимается без доказательства.

Из изложенного вытекает следующая схема исследования функции $z = f(x, y)$ на экстремум:

- найти критические точки этой функции (т. е. точки (x_0, y_0) , в которых первые частные производные функции обращаются в нуль или не существуют);
- каждую найденную критическую точку исследовать с помощью достаточного признака экстремума;

— найти экстремальные значения функции $z = f(x, y)$, подставив вместо x и y координаты точки максимума или минимума.

Пример. Исследуем на экстремум функцию $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Поступим согласно вышеприведенной схеме.

— Найдем критические точки функции:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными для нахождения координат критических точек. Из второго уравнения выразим $x = y^2$ и подставим в первое уравнение. Тогда $y^4 - y = 0$ или $y(y-1)(y^2+y+1) = 0$. Приравняв нулю первый, а затем второй множители (третий множитель в нуль не обращается), получим два корня: $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$. Этим двум значениям отвечают соответствующие значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Итак, получили две критические точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

— С помощью достаточного признака экстремума нужно исследовать каждую из этих критических точек. Исследуем сначала вторую точку $(1, 1)$. Здесь имеем

$$A = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6x|_{x=1} = 6, \quad B = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -3,$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6y|_{y=1} = 6.$$

Таким образом, $AC - B^2 = 27 > 0$; следовательно, точка $(1, 1)$ — точка экстремума, а именно, точка минимума, так как $A = 6 > 0$.

— Найдем теперь минимальное значение функции в точке $(1, 1)$. Подставим координаты этой точки в выражение для функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ и получим $z_{\min} = z|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1^3 + 1^3 - 3 = -1$.

Другая критическая точка $(0, 0)$ исследуется аналогично. Она не является точкой экстремума.

§ 9.16. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области

Пусть в конечной области D с границей L плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$ и найдены значения функции в ее критических точках, лежащих в области D . Мы рассмотрим только случай, когда критических точек конечное число, и обозначим эти значения $z_1, z_2, \dots, z_n$. Аналогично случаю функции одного аргумента, рассматриваемая функция свои наибольшее и наименьшее значения в области D может принять в точках ее границы L . Поэтому при нахождении экстремальных значений надо рассматривать также значения функции в точках границы L области D и среди последних выделить наибольшее и наименьшее значения, которые обозначим соответственно M_L, m_L . С учетом теоремы 9.1 заключаем, что наибольшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D будет равно наибольшему из чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, M_L$, а наименьшее значение — наименьшему

из чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, m_L$.

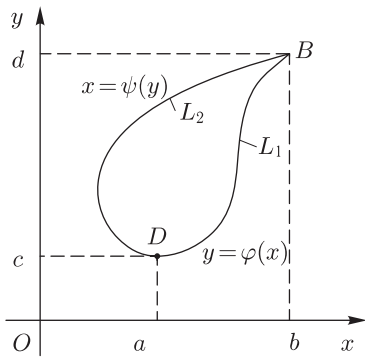


Рис. 9.10

Нахождение значений M_L и m_L сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одного аргумента. Проиллюстрируем сказанное на примере области D , граница L которой состоит из двух частей L_1 и L_2 , заданных соответственно уравнениями $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, и $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$, где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — однозначные непрерывные функции (рис. 9.10). Здесь $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$; $\psi(c) = a$, $\psi(d) = b$.

Так как $y = \varphi(x)$ есть ордината точки с абсциссой x кривой L_1 , значения функции $f(x, y)$ на L_1 представляют собой значения функции одного аргумента $f[x, \varphi(x)]$, $a \leq x \leq b$. Аналогично значения функции $f(x, y)$ на L_2 суть значения функции аргумента y : $f[\psi(y), y]$, $c \leq y \leq d$.

Пусть M_{L_1} и m_{L_1} — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f[x, \varphi(x)]$ в замкнутом интервале $a \leq x \leq b$, а M_{L_2} и m_{L_2} — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f[\psi(y), y]$ в замкнутом интервале $c \leq y \leq d$. Эти числа находятся известным нам способом (§ 7.2). Ясно, что m_L есть наименьшее из чисел m_{L_1}, m_{L_2} , а M_L — наибольшее из чисел M_{L_1} и M_{L_2} .

Аналогично поступаем в случае, когда кривая L разбивается на большое число частей указанного вида.

Пример. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге, ограниченном окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Как уже отмечалось, эта функция, график которой изображен на рис. 9.9, не имеет экстремумов, так как ее единственная критическая точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума (см. 9.14). Следовательно, наибольшее и наименьшее значения она принимает в точках границы — окружности $x^2 + y^2 = 1$. Последнее уравнение запишем в виде

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{при } y \geq 0; \quad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{при } y < 0.$$

Эти уравнения определяют две полуокружности, из которых состоит исходная окружность. В точках первой полуокружности ($y \geq 0$) функция $z = x^2 - y^2$ принимает значения $z = x^2 - (1 - x^2)$, т. е. $z = 2x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Такие же значения эта функция принимает в точках второй полуокружности. Следовательно, достаточно найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 - 1$ в замкнутом интервале $-1 \leq x \leq 1$. Ее производная $z' = 4x$ обращается в нуль при $x = 0$, это единственная критическая точка рассматриваемой функции в замкнутом интервале $[-1, 1]$. Она является точкой минимума согласно теореме 7.5, так как $z'' = 4 > 0$. Минимальное значение функции равно $z|_{x=0} = -1$. Ясно, что значения функции $z = 2x^2 - 1$ на концах интервала $[-1, 1]$, равные 1, являются ее наибольшими значениями. Итак, наибольшее и наименьшие значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ равны соответственно 1 и -1 .

§ 9.17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Прямая называется *касательной к поверхности* в точке $P(x, y, z)$ этой поверхности, если она является касательной в точке P к какой-либо линии, лежащей на поверхности и проходящей через точку P . Так как через точку P проходит бесконечное множество линий, лежащих на поверхности, то ясно, что касательных прямых к поверхности в точке P бесконечное множество. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 9.5. Пусть в пространстве $Oxyz$ поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \tag{9.39}$$

а точка $P(x, y, z)$ этой поверхности такова, что в ней частные производные $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ от левой части уравнения (9.39) не обращаются в нуль одновременно. Тогда все прямые, касательные к поверхности в точке P , лежат в одной плоскости.

Доказательство. Пусть поверхность, заданная уравнением (9.39), имеет вид, указанный на рис. 9.11. Пусть L — произволь-

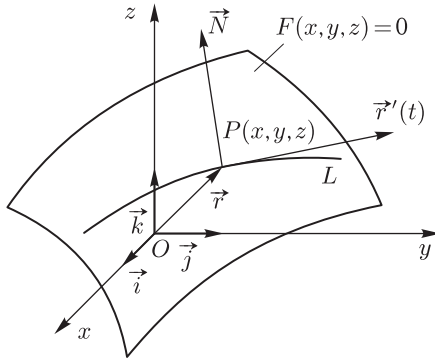


Рис. 9.11

ная линия, лежащая на поверхности и проходящая через ее точку $P(x, y, z)$. Параметрические уравнения этой линии запишем так:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (9.40)$$

(здесь t — параметр). От параметрических уравнений L перейдем к векторному уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (9.41)$$

Здесь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — радиус-вектор точки $P(x, y, z)$. Мы знаем, что производная от функции (9.41), $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, вычисленная для точки P , отвечающей выбранному значению параметра t , есть вектор с началом в точке P , направленный по касательной к линии L . Будем считать, что кривая L выбрана так, что $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. С другой стороны, вычислим частные производные от левой части уравнения (9.39) для точки P . Построим вектор $\vec{N}$ с началом в точке P , проекции на оси координат которого равны этим частным производным: $\vec{N} = (\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z)$. По условию теоремы проекции этого вектора не обращаются в нуль одновременно, следовательно, длина вектора $|\vec{N}| \neq 0$. Но кривая L лежит на поверхности, поэтому координаты любой ее точки, определенные по формулам (9.40), удовлетворяют уравнению (9.39), т.е. для всех t имеем $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Это соотношение продифференцируем по t , учитывая, что левая часть — сложная функция, в которой F — функция трех переменных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'_t + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'_t + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot z'_t = 0. \quad (9.42)$$

Соотношение (9.42) справедливо для любой точки линии L и в том числе для значения t , отвечающего точке P . Возьмем скалярное произведение векторов $\vec{N}$ и $\vec{r}'(t)$, построенных в точке P . Оно равно сумме произведений одноименных проекций соответствующих векторов $\vec{N}$ и $\vec{r}'(t)$: $(\vec{N}, \vec{r}'(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t)$. В силу (9.42) правая часть последней формулы равна нулю. Итак, скалярное произведение $(\vec{N}, \vec{r}'(t)) = 0$, а поскольку длины векторов не равны нулю — векторы перпендикулярны. Итак, $\vec{N} \perp \vec{r}'(t)$, но L — любая кривая, лежащая на поверхности и проходящая через точку P , для которой выполняется условие $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. Таким образом, любая касательная прямая к поверхности перпендикулярна вектору $\vec{N}$. Это означает, что все касательные прямые к поверхности в точке P перпендикулярны $\vec{N}$ — одному и тому же вектору. Следовательно, все касательные прямые лежат в одной плоскости. Теорема доказана.

Указанная плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке P . Мы показали, что вектор $\vec{N}$ с началом в точке P , проекции которого $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z)$ суть частные производные, вычисленные в точке P , есть вектор, перпендикулярный к касательной плоскости поверхности в точке P , т. е. является нормальным вектором этой плоскости.

Прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная к касательной плоскости в ней, называется *нормалью* к поверхности в точке P .

§ 9.18. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением (9.39) и $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка этой поверхности, т. е. ее координаты x_0, y_0, z_0 — заданные числа. Вычислим частные производные $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ и найдем их значения в точке P_0 :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}.$$

Полученные числа являются проекциями нормального вектора $\vec{N} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} \right)$ касательной плоскости к поверхности

в точке P_0 . Зная проекции этого вектора и координаты x_0, y_0, z_0 точки P_0 , сразу запишем уравнение касательной плоскости:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z-z_0) = 0.$$

Зная координаты точки P_0 и проекции вектора $\vec{N}$ для точки P_0 , являющегося направляющим вектором нормали к поверхности в точке P_0 , запишем канонические уравнения этой нормали

$$\frac{x-x_0}{(\partial F/\partial x)_{P_0}} = \frac{y-y_0}{(\partial F/\partial y)_{P_0}} = \frac{z-z_0}{(\partial F/\partial z)_{P_0}}.$$

В качестве примера возьмем сферу с центром в начале координат и уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$. В точке $P(1, 1, 1)$ сферы запишем уравнение касательной плоскости и уравнение нормали. Итак, $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} &= 2x|_{x=x_0} = 2, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} = 2y|_{y=y_0} = 2, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} &= 2z|_{z=z_0} = 2.\end{aligned}$$

Довести решение данной задачи до конца предлагается самостоятельно.

§ 9.19. Скалярное поле

Скалярным полем называется пространство, в каждой точке которого задано значение некоторой скалярной величины. В пространстве введем систему координат $Oxyz$. В каждой точке P с координатами (x, y, z) зададим значение скалярной величины U (т. е. U является функцией координат x, y, z точки P). Итак, задание скалярного поля в пространстве $Oxyz$ равносильно заданию функции трех переменных $U = U(P) = U(x, y, z)$, где x, y, z — координаты произвольной точки P пространства. Примером скалярного поля является поле температур помещения, в каждой точке которого температура своя.

Поверхностью уровня в скалярном поле называется геометрическое место точек, в которых величина U принимает одно и то же значение, т. е. $U = c = \text{const}$ или $U(x, y, z) = c$. Ясно, что последнее соотношение представляет собой уравнение этой поверхности уровня, так как здесь $U(x, y, z)$ — известное выражение, а соотношение $U(x, y, z) = c$ выполняется для координат любой точки поверхности. Для каждого значения постоянной c уравнение $U(x, y, z) = c$ определяет свою поверхность уровня. Изменяя c , получим семейство поверхностей уровня.

Пусть, например, скалярное поле определяется функцией $U = x^2 + y^2 + z^2$. Тогда поверхность уровня имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 =$

$= c$. Так как левая часть неотрицательна, то $c \geq 0$. Обозначив $c = R^2$, получим $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат. Изменяя R , получим семейство сфер.

Рассматривают также и плоские скалярные поля. Для этого в плоскости Oxy задают функцию двух переменных $U(P) = U(x, y)$, где x, y — координаты точки P . *Линией уровня* этого плоского скалярного поля называется линия, для всех точек которой $U(x, y) = c = \text{const}$. Здесь, изменяя c , получим семейство линий плоского скалярного поля. Этому полю, т.е. функции $U(x, y)$, в пространстве $Oxyz$ отвечает поверхность $z = U(x, y)$. Во всех точках линии уровня, для которой $U(x, y) = c$, имеем $z = U(x, y) = c = \text{const}$, т.е. все точки рассматриваемой поверхности $z = U(x, y)$ над линией уровня находятся на одной и той же высоте относительно плоскости Oxy . Отсюда и происходит понятие линии уровня.

§ 9.20. Производная по направлению

Пусть в системе координат $Oxyz$ задано скалярное поле, т.е. функция трех переменных $U(P) = U(x, y, z)$, и $P(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Проведем через нее ось λ , направление которой определяется единичным вектором $\vec{e}_\lambda$ (рис. 9.12). Пусть ось λ образует

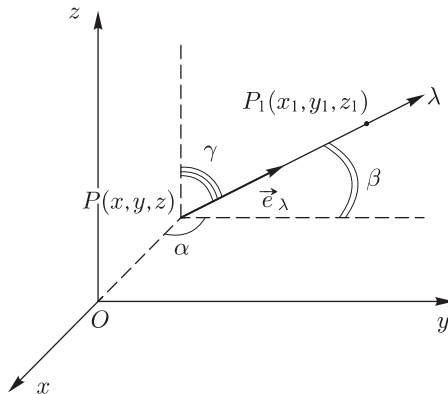


Рис. 9.12

с осями координат Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно, тогда $\vec{e}_\lambda = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Пусть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка оси λ , а расстояние $PP_1 = \rho$. Проекции вектора $\overrightarrow{PP_1}$ на оси координат равны разностям координат конца и начала этого вектора:

$$\overrightarrow{PP_1} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z). \quad (9.43)$$

С другой стороны, проекции этого вектора равны его длине ρ , умноженной на косинус угла между соответствующей осью и вектором, поэтому $\overrightarrow{PP_1} = (\rho \cos \alpha, \rho \cos \beta, \rho \cos \gamma)$. Значит, последние проекции равны соответствующим проекциям в (9.43). Поэтому

$$x_1 = \rho \cos \alpha + x, \quad y_1 = \rho \cos \beta + y, \quad z_1 = \rho \cos \gamma + z. \quad (9.44)$$

Следовательно, с учетом (9.44) имеем

$$U(P_1) = U(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma). \quad (9.45)$$

Пусть P — фиксированная точка (x, y, z — заданные числа) и λ — фиксированная ось, т. е. α, β, γ — фиксированные величины. Пусть изменяется только ρ , тогда точка P_1 перемещается по оси λ относительно фиксированной точки P . При этом, как видно из формулы (9.45), значение U в точке P_1 зависит только от одной переменной ρ ; следовательно, отношение $[U(P_1) - U(P)]/\rho$ тоже зависит только от одной переменной ρ . Предел этого отношения при $\rho \rightarrow 0$ (когда $P_1 \rightarrow P$ по оси λ) называется *производной по направлению* λ от функции $U(P) = U(x, y, z)$ в точке P и обозначается $\partial U / \partial \lambda = U'_\lambda(x, y, z)$. Итак, производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{U(P_1) - U(P)}{\rho}. \quad (9.46)$$

Мы знаем, что для полного приращения функции трех переменных справедливо представление

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) = \\ = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z, \end{aligned}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — бесконечно малые функции, стремящиеся к нулю, когда $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ одновременно. Это представление получено в предположении, что частные производные $\partial U / \partial x, \partial U / \partial y, \partial U / \partial z$ непрерывны. В последней формуле положим $\Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} U(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - U(x, y, z) = \\ = \frac{\partial U}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \rho \cos \gamma + \gamma_1 \rho \cos \alpha + \gamma_2 \rho \cos \beta + \gamma_3 \rho \cos \gamma. \end{aligned}$$

Левая часть этой формулы равна $U(P_1) - U(P)$. Подставим это выражение в числитель формулы (9.46) и сократим на ρ . При этом под знаком предела величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0$ (когда $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ одновременно). Тогда из (9.46) получим формулу для вычисления производной по направлению λ в точке P :

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = U'_\lambda(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (9.47)$$

Из нее видно, что эта производная зависит от:

- координат x, y, z точки P , так как от этих координат зависят выражения для частных производных в правой части формулы (9.47);
- направления оси λ , т.е. от углов α, β, γ , так как они входят в правую часть формулы (9.47).

При фиксированных P и λ производная по направлению $dU/\partial\lambda$ характеризует поведение функции при движении по оси λ . Когда $dU/\partial\lambda > 0$, в положительном направлении оси λ функция U возрастает, причем тем быстрее, чем больше эта производная. В сказанном легко убедиться на основании (9.46).

§ 9.21. Градиент функции и его связь с производной по направлению

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано скалярное поле, т.е. функция $U(P) = U(x, y, z)$, где x, y, z — координаты точки P . От этой функции найдем частные производные $\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z$. Эти производные вычислим для точки $P(x, y, z)$ и построим вектор с началом в точке P , обозначаемый $\text{grad } U$ и называемый *градиентом функции в точке P* , проекции которого равны только что вычисленным частным производным:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (9.48)$$

Длина этого вектора определяется формулой

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (9.49)$$

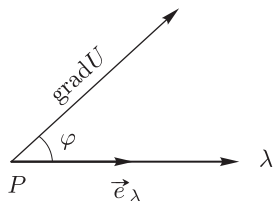


Рис. 9.13

Через точку P проведем ось λ с единичным вектором $\vec{e}_\lambda = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ (рис. 9.13). Запишем скалярное произведение векторов $\vec{e}_\lambda$ и $\text{grad } U$:

$$(\text{grad } U, \vec{e}_\lambda) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma.$$

Правая часть этой формулы равна $\partial U/\partial\lambda$ — производной по направлению λ от функции U в точке P . Таким образом, получим

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\text{grad } U, \vec{e}_\lambda). \quad (9.50)$$

Эта формула связывает производную по направлению в точке P и $\text{grad } U$ в точке P . Скалярное произведение в формуле (9.50) выразим через длины векторов и косинус угла φ между ними:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cos \varphi. \quad (9.51)$$

Пусть P — фиксированная точка (ее координаты — заданные числа). Тогда $\text{grad } U$ в этой точке, определенный по формуле (9.48), есть фиксированный вектор. Будем изменять угол φ , т.е. направление оси λ . Из формулы (9.51) видно, как изменяется производная по направлению $\partial U / \partial \lambda$ в точке P с изменением направления оси λ , т.е. угла φ . Ясно, что наибольшее свое значение эта производная принимает, когда $\cos \varphi = 1$, т.е. $\varphi = 0$, и ось λ направлена по градиенту U . Получили, что $\text{grad } U$ — вектор, направление которого указывает

направление наискорейшего возрастания функции U по сравнению со всеми другими направлениями оси λ .

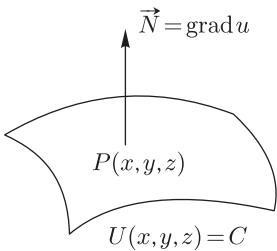


Рис. 9.14

Пусть $U = U(x, y, z) = c$, где $c = \text{const}$, есть уравнение поверхности уровня рассматриваемого скалярного поля, проходящей через точку P (рис. 9.14). Запишем это уравнение так: $U(x, y, z) - c = 0$. Левую часть обозначим через $F(x, y, z)$. Тогда уравнение этой поверхности будет иметь вид $F(x, y, z) = 0$. Частные производные от функции F равны $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}$. Мы знаем, что эти производные, вычисленные в точке P поверхности уровня, являются проекциями вектора $\vec{N}$, направленного по нормали к этой поверхности, т.е. $\vec{N} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$. Но согласно формуле (9.48) такие же проекции имеет и $\text{grad } U$ в точке P , т.е. $\vec{N} = \text{grad } U$. Таким образом, $\text{grad } U$ есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через точку P .

Глава 10

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

§ 10.1. Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \quad (10.1)$$

где x и y — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$, или

$$i^2 = -1. \quad (10.2)$$

Число x называется *действительной частью*, а число y — *мнимой частью* числа z , их обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны между собой ($z_1 = z_2$), если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексное число $z = x + iy = 0$, если $x = 0$ и $y = 0$. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Сумма и разность. Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Их сумма и разность — комплексные числа, определяемые следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведение $z_1 \cdot z_2$ — это комплексное число, которое получается при перемножении этих чисел как двучленов по правилам алгебры:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2,$$

или с учетом (10.2)

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Для сопряженных чисел $z_2 = x_2 + iy_2$ и $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ будем иметь $z_2 \cdot \bar{z}_2 = (x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2) = x_2^2 - (iy_2)^2$, или с учетом (10.2)

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = x_2^2 + y_2^2. \quad (10.3)$$

Деление. Для того, чтобы z_1 поделить на z_2 , нужно числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 умножить на комплексное число $\bar{z}_2$, сопряженное знаменателю, при этом результатом деления будет комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример. Пусть $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (1 + 3) + i(2 - 4) = 4 - 2i,$$

$$z_1 - z_2 = (1 - 3) + i(2 - (-4)) = -2 + 6i,$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 3 - 4i + 6i - 8i^2 = \\ &= (3 + 8) + i(6 - 4) = 11 + 2i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i + 8i^2}{3^2 + 4^2} = \\ &= \frac{(3 - 8) + i(4 + 6)}{25} = -\frac{5}{25} + i \frac{10}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

§ 10.2. Геометрическое изображение и тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $M(x, y)$ с координатами x, y . В этом случае плоскость называется *комплексной*, Ox — *действительной осью*, а Oy — *мнимой осью*. В некоторых случаях комплексное число $z = x + iy$ представляют в виде вектора $\overrightarrow{OM}$.

Обозначим через φ и r полярные координаты точки $M(x, y)$, считая начало координат полюсом, а положительную полуось Ox — полярной осью. Тогда (рис. 10.1)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (10.4)$$

Следовательно, комплексное число z можно представить в виде $x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$ или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (10.5)$$

Это и есть *тригонометрическая форма комплексного числа*. Величины r и φ называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и обозначаются $r = |z|$, $\varphi = \text{Arg } z$. Положитель-

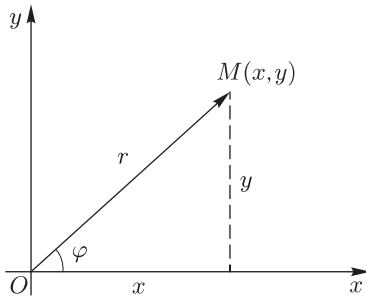


Рис. 10.1

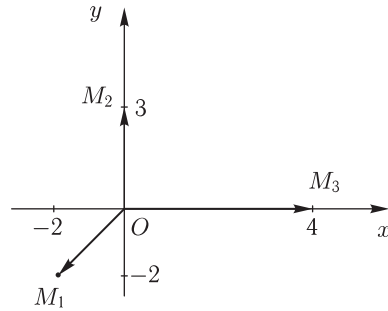


Рис. 10.2

ным направлением отсчета аргумента φ считается направление против хода часовой стрелки. Из соотношений (10.4) следует, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2\pi k, & x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} + 2\pi k, & x < 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

где k — любое целое число, $-\pi/2 < \arctg(y/x) < \pi/2$. При $x = 0$ имеем $\varphi = \pi/2 + 2\pi k$, если $y > 0$, и $\varphi = -\pi/2 + 2\pi k$, если $y < 0$. Учитывая, что $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ суть 2π -периодические функции, при записи комплексных чисел в виде (10.5) слагаемые $2\pi k$ будем опускать.

Пример. Представить числа $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 4$ в тригонометрической форме.

Комплексному числу z_1 на плоскости Oxy соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$ с концом в точке $M_1(-2, -2)$, расположенной в третьей четверти координатной плоскости (рис. 10.2). Используя (10.6), найдем

$$r_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\varphi_1 = \pi + \arctg [(-2)/(-2)] = \pi + \pi/4 = 5\pi/4.$$

Значит, $z_1 = 2\sqrt{2} (\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$. Комплексному числу $z_2 = 0 + 3i$ на плоскости Oxy соответствует вектор $\overrightarrow{OM_2} = (0, 3)$, следовательно, $\varphi_2 = \pi/2$, $r_2 = 3$, $z_2 = 3 (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$. Комплексному числу $z_3 = 4 + 0i$ на плоскости Oxy соответствует вектор $\overrightarrow{OM_3} = (4, 0)$. Аргумент $\varphi_3 = 0$, модуль $r_3 = 4$, отсюда $z_3 = 4 (\cos 0 + i \sin 0)$.

Пусть два комплексных числа заданы в тригонометрической форме: $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Найдем $z_1 \cdot z_2$ и z_1/z_2 , учитывая, что $i^2 = -1$. Получим

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

или

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (10.7)$$

Вычислим z_1/z_2 , умножив числитель и знаменатель на $\overline{z_2}$, при этом учтем (10.3):

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2^2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)], \end{aligned}$$

или $z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

§ 10.3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа

Возведение в степень. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Возведем z в степень n , где n — целое положительное число. Это означает, что число z надо умножить само на себя n раз. Используя (10.7), получим $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Это соотношение называется *формулой Муавра*, она применима и для определения возведения в степень в случае целых $n \leq 0$.

Извлечение корня. Корнем n -й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n -я степень которого равняется подкоренному числу, т. е. $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$, если $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi)$. У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут лишь отличаться на число, кратное 2π . Отсюда $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число, следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$. Итак,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (10.8)$$

Придавая k значения от 0 до $n-1$, получим n различных значений корня. Для всех других k соответствующие значения корня будут совпадать с найденными. Таким образом, корень n -й степени из комплексного числа имеет n значений.

Пример. Решить уравнение $z^3 = 1 + i$.

Представим число $1 + i$ в тригонометрической форме, для этого найдем $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctg 1 = \pi/4$. Отсюда

$$1 + i = \sqrt{2} [\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)].$$

§ 10.5. Комплексная функция действительного аргумента и ее производная

Функция

$$W = U(x) + iV(x), \quad (10.10)$$

где $U(x)$, $V(x)$ — действительные функции действительного аргумента x , называется *комплексной функцией действительного аргумента* x . Пусть $U(x)$, $V(x)$ — дифференцируемые функции, тогда выражение $W'_x = U'(x) + iV'(x)$ называется *производной функции* (10.10). Рассмотрим одну такую комплексную функцию действительного аргумента x : $W = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x}$, где α и β — действительные числа. Правую часть последней формулы запишем в виде (10.9), взяв вместо x и y соответственно αx и βx , и получим

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (10.11)$$

Найдем производную по x этой функции:

$$\begin{aligned} (e^{(\alpha+i\beta)x})'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)'_x + i(e^{\alpha x} \sin \beta x)'_x = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)] + i\beta[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \end{aligned}$$

Итак, $(e^{(\alpha+i\beta)x})'_x = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$. Обозначив $\alpha + i\beta = k$, будем иметь

$$(e^{kx})'_x = ke^{kx}. \quad (10.12)$$

В результате получили такую же формулу, что и для действительного числа k . Далее, $(e^{kx})''_{xx} = ((e^{kx})'_x)'_x = k(e^{kx})'_x = k^2e^{kx}$. Для производной n -го порядка по x получим

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}. \quad (10.13)$$

§ 10.6. Элементы топологии. Простые куски

Пусть в пространстве заданы две поверхности S и $\tilde{S}$, и между точками этих поверхностей установлено взаимно однозначное соответствие, т.е. каждой точке первой поверхности отвечает определенная точка второй и, наоборот, каждой точке второй поверхности соответствует определенная точка первой. Пусть M_0 — любая фиксированная точка поверхности S и $\tilde{M}_0$ — соответствующая ей точка поверхности $\tilde{S}$. Пусть, кроме того, M — переменная точка поверхности S и $\tilde{M}$ — соответствующая ей точка на поверхности $\tilde{S}$. Взаимно однозначное

соответствие между точками поверхностей S и $\tilde{S}$ называют *непрерывным* и говорят, что поверхность S *топологически отображается* на поверхность $\tilde{S}$, если при $M \rightarrow M_0$ имеем $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}_0$ в том смысле, что когда $|MM_0| \rightarrow 0$, то $|\tilde{M}\tilde{M}_0| \rightarrow 0$, и наоборот.

Простым куском поверхности называется множество точек, которые отображаются топологически на круг, включая окружность, являющуюся границей этого круга. Ясно, что при этом точкам окружности отвечают определенные точки простого куска, которые будем называть *граничными точками простого куска*. Они образуют сплошную замкнутую линию, которая отображается на указанную окружность взаимно однозначно и непрерывно.

Будем говорить, что *два простых куска склеены*, если между точками некоторых дуг — границ этих кусков — установлено взаимно однозначное соответствие и путем деформации и перемещения кусков вышеуказанные точки окажутся совмещены.

Пусть два простых куска имеют форму двух одинаковых прямоугольников (рис. 10.3). Эти прямоугольники склеим по участкам BC

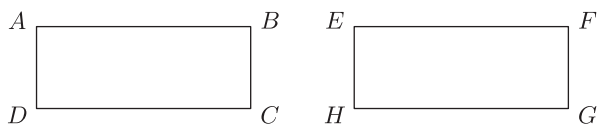


Рис. 10.3

и EH , совместив их так, чтобы точка E совпала с точкой B , а точка C — с H (здесь вновь получим простой кусок). Затем оставшиеся участки AD и FG также склеим, совместив точки A и F , D и G . При этом будем сгибать наши куски, получая трубку. Таким образом, при склеивании простых кусков можем получить как поверхность, которая является простым куском, так и поверхность, которая является трубкой, как показано на рис. 10.4. Эта поверхность не является простым куском, так как ее границей служат две кривые: одна, ограничивающая сверху, другая — снизу. (Ясно, что поверхность, имеющая две границы, не может взаимно однозначно (топологически) и непрерывно отображаться на круг, который имеет границу, состоящую из одной окружности.)

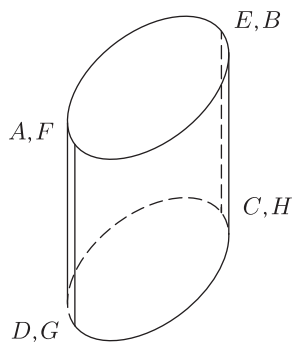


Рис. 10.4

Можно получить не только трубку, но и более сложную поверхность, склеив участки BC и EH , а затем совместив участки AD и FG ,

перекручивая один из листов так, чтобы точка F совпала с точкой D , а G — с A . Эта фигура называется *листом Мёбиуса* (рис. 10.5).

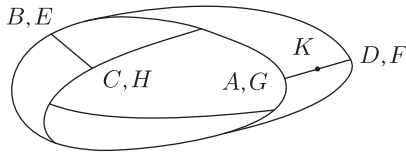


Рис. 10.5

Этот лист характеризуется следующим: будем двигаться от точки K отрезка AD , взятой на стороне, обращенной к наблюдателю, по листу, например, в сторону ребра $BC = EH$, не выходя на край листа, тогда при полном обороте мы вернемся в точку K , но окажемся на другой стороне листа (так как один из прямоугольников перекручен). Чтобы вернуться на исходную сторону, нужно совершить еще один обход по листу в том же направлении. Это означает, что лист можно покрасить одной краской, не переходя через край при двукратном обходе. Отметим, что лист Мёбиуса — поверхность с одной границей.

Таким образом, склеивая простые куски, можно получать поверхности, которые не являются простыми кусками. Рассматриваемые поверхности, не будучи простыми кусками, могут при этом представлять собой конечное или бесконечное количество склеенных между собой простых кусков. Например, шар представляет собой совокупность двух полушарий, каждое из которых — простой кусок. Плоскость можно рассматривать как совокупность бесконечного числа склеенных между собой прямоугольников.

§ 10.7. Параметризация поверхности

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана поверхность S (рис. 10.6). На произвольно взятой плоскости введем декартову систему координат $O'uv$ и зададим некоторую область D .

Пусть поверхность S топологически взаимно однозначно отображается на область D . Это значит, что любой точке M поверхности S отвечает определенная точка $\tilde{M}$ с координатами (u, v) . В этом случае поверхность S называется *параметризованной*, а декартовы координаты (u, v) точки $\tilde{M}$ области D называются *криволинейными координатами* соответствующей точки M поверхности S . Действительно, задав эти координаты, мы определили положение точки $\tilde{M}$, следовательно, и положение точки M на поверхности S .

Рассмотрим уравнение $u = C_1 = \text{const.}$ Оно определяет прямую в плоскости $O'uv$, параллельную оси $O'v$. Отрезку этой прямой, ле-

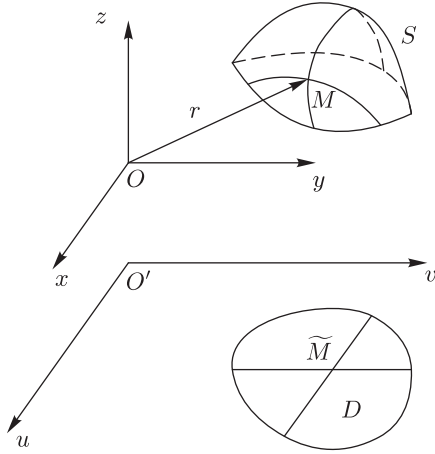


Рис. 10.6

жащему в области D при вышеуказанном отображении области D на поверхность S отвечает линия. Эту линию будем называть *координатной линией* на рассматриваемой поверхности S . Изменяя C_1 , получим разные координатные линии на поверхности, т. е. семейство координатных линий. Через точку M проходит только одна координатная линия описанного семейства. Аналогично, отрезку прямой $v = C_2 = \text{const}$, параллельной оси $O'u$, лежащему внутри области D , отвечает кривая на поверхности S , которая также называется координатной линией. Изменяя C_2 , получим второе семейство координатных линий на поверхности S . Ясно, что через точку M проходит лишь одна линия этого семейства.

Пусть (x, y, z) — координаты точки M в декартовой системе $Oxyz$, а $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M в этой системе, когда $\vec{r}$ имеет проекции, равные координатам точки M , т. е. $\vec{r} = (x, y, z)$. Каждой паре чисел (u, v) — декартовым координатам точки $\tilde{M}$ — отвечает определенная точка M поверхности, значит, и определенный радиус-вектор $\vec{r}$ этой точки. Следовательно, этот радиус-вектор является функцией от (u, v) , т. е.

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (10.14)$$

Если вышеуказанное топологическое отображение поверхности S на область D задано, то это означает, что функция (10.14) также задана. Соотношение (10.14) можно считать векторным уравнением поверхности S . Проекции вектора $\vec{r}(u, v)$ на оси координат (Ox, Oy, Oz) обозначим $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Поскольку этот вектор есть радиус-вектор точки M , то

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (10.15)$$

Выражения (10.15) называются *параметрическими уравнениями поверхности S* .

Мы знаем, что в системе $Oxyz$ поверхность S определяется уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (10.16)$$

где F — известное выражение, содержащее x, y, z . Этому уравнению удовлетворяют координаты (x, y, z) любой точки M поверхности S . От параметрических уравнений (10.15) можно перейти к уравнению вида (10.16), так как каждой точке M с координатами (x, y, z) поверхности S отвечает определенная пара чисел (u, v) — криволинейные координаты этой точки M (являющиеся декартовыми координатами соответствующей точки $\widetilde{M}$ области D). Это означает, что система (10.15) при заданных x, y, z разрешима относительно u, v , т.е. величины u и v можно найти из системы (10.15). Пусть, например, эти величины можно найти из первых двух уравнений системы (10.15). Находим их: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Эти выражения подставим в третье уравнение системы (10.15) и получим $z = z(u(x, y), v(x, y))$. Здесь правая часть — уже известное выражение, содержащее x, y . Обозначим ее через $f(x, y)$ и получим соотношение

$$z = f(x, y), \quad (10.17)$$

или

$$z - f(x, y) = 0. \quad (10.18)$$

Итак, получили уравнение вида (10.16). Таким образом, от параметрических уравнений вида (10.15) мы перешли к уравнению вида (10.16).

В свою очередь уравнения (10.15) можно получить из (10.16). Покажем это для случая, когда уравнение (10.15) разрешено относительно z , т.е. представлено в виде (10.17). Пусть поверхность S задана уравнением (10.17). Положим $x = u$, $y = v$, и тогда уравнение (10.17) даст $z = f(u, v)$. Получили параметрические уравнения вида (10.15) этой поверхности:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v). \quad (10.19)$$

В данном случае плоскость $O'uv$ можно считать совпадающей с плоскостью Oxy , а в качестве области D возьмем область, в которую проецируется (при проецировании параллельно оси Oz) поверхность S с уравнением (10.17), следовательно, и (10.19). Отрезку $x = u = C_1 = \text{const}$ области D на поверхности отвечает координатная линия, которая является линией пересечения заданной поверхности S и плоскости $x = u = C_1$, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $x = C_1$ этой оси. Отрезку $y = v = C_2 = \text{const}$ области D отвечает координатная линия на поверхности с уравнением (10.19), или (10.17), которая представляет собой линию пересечения этой поверхности и плос-

кости с уравнением $y = v = C_2$, причем последняя перпендикулярна оси Oy и проходит через точку $y = C_2$. Здесь $x = u$, $y = v$ — соответственно абсцисса и ордината точки $M(x, y, z)$ — являются криволинейными координатами этой точки, лежащей на поверхности. Эти криволинейные координаты определяют положение точки на поверхности, так как ее аппликата определяется по указанным криволинейным координатам из уравнения поверхности $z = f(x, y)$.

§ 10.8. Параметрические уравнения сферы

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана сфера радиуса a с центром в точке $O(0, 0, 0)$ (рис. 10.7) и $M(x, y, z)$ — произвольная точка сферы. Через

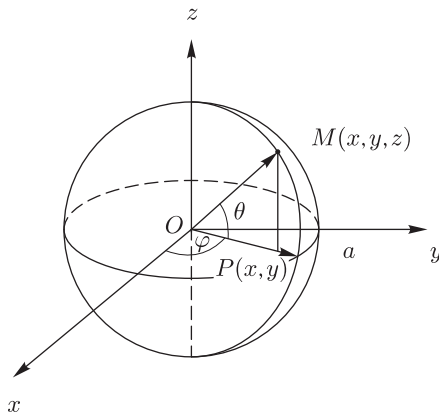


Рис. 10.7

ось Oz и точку M проведем полуплоскость. Пусть эта полуплоскость образует с плоскостью Oxz угол φ , а $P(x, y)$ — проекция точки M на плоскость Oxy . Ясно, что абсцисса x и ордината y этой точки такие же, как и у точки M . Угол φ между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OP}$ будем измерять от оси Ox и брать со знаком плюс, когда отсчет ведется против хода часовой стрелки (если смотреть навстречу положительному направлению оси Oz). Угол φ изменяется в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Угол θ между векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$ считается положительным, если отсчитывать его от вектора $\overrightarrow{OP}$ в положительную сторону оси Oz , и отрицательным, если отсчитывать в отрицательную сторону оси Oz (т. е. вниз на рис. 10.7). Угол θ изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Отметим, что φ называется *долготой* точки M , а θ — ее *широтой*. Из рис. 10.7 видно, что $PM = OM \cdot \sin \theta$, $OP = OM \cdot \cos \theta$, $OM = a$. Поскольку PM есть аппликата z точки M , то $z = a \cdot \sin \theta$, $OP =$

$= a \cdot \cos \theta$. Кроме того, $x = OP \cdot \cos \varphi$, $y = OP \cdot \sin \varphi$. Подставив сюда предыдущие выражения, получим

$$x = a \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = a \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = a \cdot \sin \theta. \quad (10.20)$$

Это параметрические уравнения сферы. Они выражают координаты x , y , z произвольной точки M сферы через величины θ , φ — широту и долготу точки M . При $\varphi = C_1 = \text{const}$ уравнения (10.20) примут вид $x = a \cdot \cos \theta \cdot \cos C_1$, $y = a \cdot \cos \theta \cdot \sin C_1$, $z = a \cdot \sin \theta$. Эти соотношения являются уравнениями координатной линии на сфере, соответствующей $\varphi = C_1$. Ясно, что эта линия будет полуокружностью, так как она является линией пересечения сферы и полуплоскости с уравнением $\varphi = C_1 = \text{const}$, которая проходит через ось Oz под углом $\varphi = C_1$ к плоскости Oxz . При $\theta = C_2 = \text{const}$ уравнения (10.20) примут вид

$$x = a \cdot \cos C_2 \cdot \cos \varphi, \quad y = a \cdot \cos C_2 \cdot \sin \varphi, \quad z = a \cdot \sin C_2.$$

Они определяют другую координатную линию, лежащую на сфере. Она представляет собой окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость с уравнением $z = a \sin C_2 = \text{const}$, перпендикулярная оси Oz .

Изменяя C_1 и C_2 , получим два семейства координатных линий на сфере. Через каждую точку сферы, за исключением точек, лежащих на оси Oz , пройдут одна линия первого семейства и одна линия второго.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 11.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов

Раньше мы решали задачи вида: дана функция $F(x)$, и нужно найти производную, которая сама является функцией от x , т. е. $F'(x) = f(x)$. Теперь нам нужно научиться решать обратную задачу, когда дана производная $f(x)$ функции $F(x)$ и нужно найти эту функцию $F(x)$. Будем считать, что заданная производная $f(x)$ — функция, непрерывная в рассматриваемом интервале. Дадим определение.

Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции $f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$* , если $F'(x) = f(x)$ для всех x из $[a, b]$.

Например, для функции $f(x) = 2x$ первообразной является функция $F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = (x^2)' = 2x$. В то же время, например, функция $F_1(x) = x^2 + 2$ также является первообразной для функции $f(x) = 2x$. Действительно, производная $F'_1(x) = (x^2 + 2)' = 2x$. Таким образом, по данной функции $f(x)$ первообразная $F(x)$ определяется не единственным образом, иначе говоря, одной функции $f(x)$ может отвечать несколько первообразных. Справедлива

Теорема 11.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для одной и той же функции $f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$, то разность этих функций есть величина постоянная в указанном интервале $[a, b]$, т. е. $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ для всех x из интервала $[a, b]$.*

Доказательство. Имеем $F'_1(x) = F'_2(x) = f(x)$ для всех x из интервала $[a, b]$. Обозначим

$$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x). \quad (11.1)$$

Производная этой функции $\varphi'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех x из интервала $[a, b]$. Пусть x — произвольная фиксированная точка интервала $[a, b]$, т. е. $a \leq x \leq b$. Для интервала $[a, x]$ и функции $\varphi(x)$ запишем формулу Лагранжа: $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x - a)$, где ξ — некоторая точка из интервала (a, x) . Но $\varphi'(\xi) = 0$, так как $\varphi'(x) = 0$ всюду в интервале $[a, b]$, поэтому $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, следовательно,

$\varphi(x) = \varphi(a)$. Однако сказанное справедливо для произвольно взятой нами точки x интервала $[a, b]$. Итак, для всех точек x интервала $[a, b]$ имеем $\varphi(x) = \varphi(a) = C = \text{const}$. Подставив последнее выражение в левую часть формулы (11.1), и получим утверждение теоремы.

Из теоремы 11.1 непосредственно вытекает, что если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ будет равна $F(x) + C$, где $C = \text{const}$. В связи с этим запишем следующее определение.

Определение. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то сумма $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом от функции $f(x)$* и обозначается $\int f(x) dx$.

Итак,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x). \quad (11.2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем C — произвольная действительная постоянная, $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования, dx — дифференциал переменной интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла (первообразной) называется *неопределенным интегрированием*. Эта операция является обратной дифференцированию, поэтому операцию интегрирования можно проверить последующим дифференцированием.

Исходя из определения неопределенного интеграла, запишем следующую таблицу основных интегралов.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$	6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg } x + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	7. $\int e^x dx = e^x + C.$
3. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C.$	10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + C.$

Покажем, например, справедливость формулы 2. В самом деле, например, для $x < 0$ имеем $|x| = -x$, поэтому

$$(\ln |x|)'_x = (\ln (-x))'_x = -\frac{1}{x} (-x)'_x = \frac{1}{x}.$$

§ 11.2. Свойства неопределенного интеграла

Из формулы (11.2), т. е. из определения неопределенного интеграла, вытекают следующие утверждения.

— Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (11.3)$$

Действительно, $\left(\int f(x) dx \right)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$.

— Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx. \quad (11.4)$$

Убедимся в этом:

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'_x dx = F'(x) dx = f(x) dx.$$

— Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (11.5)$$

Справедливость этой формулы становится ясной после того, как мы, учитывая, что $dF(x) = F'(x) dx$, запишем ее в виде $\int F'(x) dx = F(x) + C$. Из (11.5) в случае, когда $F(x)$ есть x , получим $\int dx = x + C$.

— Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций. Например, для двух функций

$$\int [f(x) + \varphi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx. \quad (11.6)$$

Для доказательства этого свойства запишем производную левой части этой формулы. Согласно (11.3) будем иметь

$$\left(\int [f(x) + \varphi(x)] dx \right)'_x = f(x) + \varphi(x). \quad (11.7)$$

Теперь запишем производную правой части формулы (11.6), учитывая формулу (11.3), а также принимая во внимание, что производная от суммы равна сумме производных:

$$\left(\int f(x) dx + \int \varphi(x) dx \right)'_x = \left(\int f(x) dx \right)'_x + \left(\int \varphi(x) dx \right)'_x = f(x) + \varphi(x).$$

Сравнив последнее выражение с формулой (11.7), заключаем, что левая и правая части формулы (11.6) имеют одну производную. По теореме 11.1 разность этих частей есть константа, следовательно, левая часть формулы (11.6) отличается от правой на постоянное слагаемое. В этом смысле и понимается равенство (11.6), как и любое другое равенство, связывающее неопределенные интегралы.

— Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла, т. е. если $A = \text{const}$, то

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx.$$

Доказательство проведите самостоятельно аналогично предыдущему.

— Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то справедливо соотношение

$$\int f(U) dU = F(U) + C,$$

где $U = \varphi(x)$ есть дифференцируемая функция с непрерывной производной $\varphi'(x)$.

Доказательство. Имеем $\int f(x) dx = F(x) + C$, т. е. согласно (11.2) $F'(x) = f(x)$. Отметим, что $F'(U) = f(U)$. Нужно доказать, что $\int f(U) dU = F(U) + C$, т. е. что $\int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$, или

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C. \quad (11.8)$$

Это соотношение имеет место согласно (11.2). Действительно, так как $(F[\varphi(x)])'_x = F'_U \cdot U'_x = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$, то эта производная равна подынтегральной функции формулы (11.8).

Таким образом, формулы интегрирования остаются справедливыми и тогда, когда переменная интегрирования — не независимая переменная, а дифференцируемая функция. Этот факт используется при интегрировании, чтобы рассматриваемые интегралы привести к известным.

Например, возьмем интеграл $\int 2xe^{x^2} dx$. Поскольку $d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx$, то исходный интеграл можно записать так:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C,$$

здесь $U = x^2$.

Теперь вычислим интеграл $\int \cos(2x) dx$. Умножим и поделим этот интеграл на 2: $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx$. Учтем, что $d(2x) = (2x)' dx = 2 dx$, поэтому

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x) d(2x) = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

§ 11.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Дан интеграл $\int f(x) dx$, который непосредственно не вычисляется. Переменную интегрирования заменим по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную. Пусть $t = t(x)$ есть функция, обратная к $x = \varphi(t)$, при этом

$$t'_x = \frac{1}{\varphi'(t)}. \quad (11.9)$$

Тогда справедлива формула замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad t = t(x). \quad (11.10)$$

Докажем это утверждение. Производная левой части формулы (11.10) равна $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$. Запишем производную по x от правой части, которая является функцией от x , поскольку $t = t(x)$. В результате по формуле для производной сложной функции с учетом (11.9) имеем

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t t'_x = f[\varphi(t)] \varphi'(t) t'_x = \\ &= f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Итак, производная от правой части формулы (11.10) равна производной по x от ее левой части, следовательно, эти части отличаются лишь на постоянное слагаемое, что и требовалось доказать.

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Избавимся от корня, для этого сделаем замену $x = \sin t$. Тогда $dx = \cos t dt$ и исходный интеграл примет вид $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt$. Выразим $\cos^2 t$ через косинус двойного угла, получим

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, будем иметь $\int \sqrt{1-x^2} dx = (1/2)t + (1/4)\sin 2t + C$, где $t = \arcsin x$ согласно замене $x = \sin t$.

§ 11.4. Интегрирование по частям

Даны две функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$, которые имеют непрерывные производные U'_x , V'_x соответственно. Мы знаем, что производная произведения равна $(UV)'_x = U'_x V + UV'_x$, поэтому

$$\int (UV)'_x dx = \int (U'_x V + UV'_x) dx.$$

Справа интеграл от суммы равен сумме интегралов слагаемых, следовательно,

$$\int (UV)'_x dx = \int U'_x V dx + \int UV'_x dx. \quad (11.11)$$

По определению дифференциала функции имеем $(UV)'_x dx = d(UV)$, $U'_x dx = dU$, $V'_x dx = dV$. Поэтому формулу (11.11) можно записать так:

$$\int d(UV) = \int V dU + \int U dV. \quad (11.12)$$

Из (11.5) следует $\int d(UV) = UV + C_1$, $\int dV = V + C_2$. В этих соотношениях константы возьмем равными нулю, учитывая, что равенство (11.12) выполняется с точностью до постоянного слагаемого. Теперь (11.12) запишем в виде

$$\int U dV = UV - \int V dU. \quad (11.13)$$

Формула (11.13) называется *формулой интегрирования по частям*. Такое название объясняется тем, что вычисление интеграла левой части $\int U dV$ сводится к нахождению двух интегралов $\int V dU$ и $\int dV = V$.

Успешность интегрирования по частям зависит от того, насколько удачно выбраны множители U и dV в подынтегральном выражении левой части. Однако нельзя указать правила, годные для всех случаев. Отметим только, что обычно за U принимают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Пример 1. Вычислить $\int xe^x dx$.

Возьмем $U = x$, тогда $dV = e^x dx$; отсюда $dU = U'_x dx = dx$, $V = \int e^x dx = e^x$. По формуле (11.13) имеем

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int x^2 e^x dx$.

Возьмем $U = x^2$, $dV = e^x dx$, тогда $dU = 2x dx$, $V = \int e^x dx = e^x$. По формуле (11.13) имеем $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$. Последний интеграл вычислен в предыдущем примере. В итоге получим

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int e^x \cos x dx$.

Положим $U = e^x$, $dV = \cos x dx$, тогда $dU = e^x dx$, $V = \int \cos x dx = \sin x$. Согласно (11.13)

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \quad (11.14)$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, положив $U = e^x$, $dV = \sin x dx$. Тогда $dU = e^x dx$, $V = \int \sin x dx = -\cos x$. Имеем $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx$. Полученное выражение для интеграла левой части подставим в (11.14). Придем к соотношению, которое содержит искомым интеграл в обеих своих частях:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Отсюда $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$.

§ 11.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих видов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Здесь все величины, кроме x , суть постоянные действительные числа, k — целое число, $k \geq 2$. Будем считать, что $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, т.е. не разлагается на произведение линейных множителей (это имеет место, когда $p^2/4 - q < 0$). Обозначим $m^2 = q - p^2/4$. Вычислим интегралы от указанных дробей.

I. За знак интеграла от дроби I вынесем постоянный множитель A , учтем, что $d(x-a) = (x-a)'_x dx = dx$, и будем иметь

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

II. Совершенно аналогично вычисляется интеграл от дроби II:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Прежде чем вычислить интеграл от третьей дроби, рассмотрим интеграл $J_1 = \int (t^2 + m^2)^{-1} dt$, где m^2 — введенная ранее величина. Здесь m^2 вынесем за скобки, затем одну степень m вынесем за знак интеграла, а другую отнесем к дифференциалу dt , учитывая, что $d(t/m) = (t/m)'_t dt = (1/m) dt$. Таким образом, получим

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \int \frac{d(t/m)}{(t/m)^2 + 1} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C. \quad (11.15)$$

III. Интеграл от дроби III обозначим $M_1 = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$. Запишем сначала дифференциал знаменателя, получим

$$d(x^2 + px + q) = (x^2 + px + q)'_x dx = (2x + p) dx.$$

Учитывая, что в числителе подынтегрального выражения стоит двучлен, содержащий x , постараемся в числителе образовать дифференциал знаменателя подынтегрального выражения, т.е. $(2x+p) dx$. С этой целью в числителе первый член умножим и разделим на 2, а затем прибавим и вычтем $Ap/2$. В результате получим

$$M_1 = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{(A/2)(2x+p) + B - Ap/2}{x^2+px+q} dx.$$

Дробь под знаком интеграла запишем в виде суммы двух дробей и представим интеграл в виде суммы интегралов от этих дробей:

$$M_1 = (A/2) \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (B - Ap/2) \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Во втором интеграле в знаменателе выделим полный квадрат и получим

$$x^2 + 2 \frac{p}{2} x + q = x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Теперь интеграл примет вид

$$M_1 = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x + p/2)^2 + q - p^2/4}.$$

Первый интеграл равен логарифму знаменателя. Во втором интеграле сделаем замену $x + p/2 = t$, тогда $x = t - p/2$, поэтому $dx = dt$. Кроме того, учтем, что $q - p^2/4 = m^2$. Итак, получим

$$M_1 = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + m^2}. \quad (11.16)$$

Последний интеграл в соотношении (11.16) есть интеграл J_1 , вычисляющийся по формуле (11.15). Здесь мы должны учесть, что $t = x + p/2$, а $m = \sqrt{q - p^2/4}$.

IV. Интеграл от дроби IV обозначим M_k . Поступая аналогично предыдущему случаю, будем иметь

$$M_k = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}. \quad (11.17)$$

Таким образом, вычисление интеграла M_k сводится к вычислению интеграла $J_k = \int (t^2 + m^2)^{-k} dt$.

Умножим и разделим этот интеграл на m^2 . Внеся множитель m^2 под знак интеграла, в числителе прибавим и вычтем t^2 . Затем подынтегральное выражение запишем как разность двух дробей и интеграл в виде разности интегралов от этих двух дробей:

$$J_k = m^{-2} \int (t^2 + m^2)^{1-k} dt - m^{-2} \int t^2 (t^2 + m^2)^{-k} dt. \quad (11.18)$$

В правой части (11.18) первый интеграл равен J_{k-1} , а второй интеграл проинтегрируем по частям, полагая $U = t$, $dV = \frac{t}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k}$. При этом $dU = dt$,

$$V = \frac{1}{2} \int (t^2 + m^2)^{-k} d(t^2 + m^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1}.$$

Поэтому

$$\int t^2 (t^2 + m^2)^{-k} dt = \frac{t}{2} \cdot \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{2(-k+1)} \int (t^2 + m^2)^{-k+1} dt,$$

где интеграл в правой части равен J_{k-1} . Окончательно выражение (11.18) примет вид

$$J_k = \int (t^2 + m^2)^{-k} dt = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} J_{k-1}. \quad (11.19)$$

Эта формула называется *рекуррентной*. Заменяя в (11.19) k на $k-1$, выразим J_{k-1} через J_{k-2} ; заменив k на $k-2$, выразим J_{k-2} через J_{k-3}

и т. д.; наконец, выразим J_2 через J_1 . Вычислив J_1 по формуле (11.15), найдем J_2 , затем $J_3, \dots, J_k$. Наконец, подставив J_k в (11.17), найдем M_k . При этом учитываем, что $t = x + p/2$, а $m = \sqrt{q - p^2/4}$.

§ 11.6. Разложение многочлена на множители

Функция вида

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n \quad (11.20)$$

называется *многочленом*, или *полиномом степени n* , n — целое положительное число. Числа $A_0, A_1, \dots, A_n$ ($A_0 \neq 0$) являются *коэффициентами многочлена*, их будем считать действительными числами. Число $x = a$, при котором многочлен обращается в нуль ($f(a) = 0$), называется *корнем многочлена*.

Нетрудно проверить, что если комплексное число $\alpha + i\beta$ (α, β — действительные числа) является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\alpha - i\beta$ также будет корнем этого многочлена. Значит, в случае многочлена с действительными коэффициентами комплексные корни являются парными (комплексно сопряженными). Согласно основной теореме алгебры всякий многочлен степени n имеет n корней, которые могут быть действительными или комплексными. Отсюда следует, что любой многочлен степени n вида (11.20) может быть разложен на произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов

$$f(x) = A_0(x - a)(x - b)^s \dots (x^2 + tx + n)(x^2 + px + q)^\mu \dots \quad (11.21)$$

В этой формуле все величины в правой части, кроме x , суть действительные числа, s, μ — целые положительные числа. Считается, что квадратные трехчлены, которые можно разложить на линейные двучлены, уже разложены, а оставшиеся в (11.21) квадратные трехчлены не разлагаются на линейные множители. Это означает, что указанные квадратные трехчлены имеют комплексные корни. Кроме того, предполагается, что в правой части (11.21) нет одинаковых множителей, т. е. что все одинаковые множители уже объединены в степени. Множителю $(x - a)$ отвечает простой действительный корень $x = a$ многочлена (11.21), а множителю $(x - b)^s$ — кратный корень $x = b$ кратности s . Множителю $(x^2 + tx + n)$ отвечает простая пара комплексно сопряженных корней многочлена, а множителю $(x^2 + px + q)^\mu$ — пара комплексно сопряженных корней кратности μ . В дальнейшем будем считать, что корни многочлена $f(x)$, а следовательно, и представление (11.21) известны.

§ 11.7. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Рациональной называется функция, представляющая собой отношение двух многочленов

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_{m-1}x + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n}. \quad (11.22)$$

Если $m < n$, то дробь (11.22) называется *правильной рациональной дробью*. Если $m \geq n$, то дробь (11.22) называется *неправильной рациональной дробью*.

Всякую неправильную рациональную дробь путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби, т.е. $Q(x)/f(x) = M(x) + F(x)/f(x)$, где $M(x)$ — многочлен, $F(x)/f(x)$ — правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель $f(x)$ на множители по формуле (11.21), в которой всюду в дальнейшем будем считать, что $A_0 = 1$ (если $A_0 \neq 1$, то дробь $F(x)/f(x)$ нужно преобразовать, поделив и числитель, и знаменатель на A_0):

$$f(x) = (x-a)(x-b)^s \dots (x^2+mx+n)(x^2+px+q)^\mu \dots \quad (11.23)$$

Без доказательства запишем следующее утверждение.

Если знаменатель дроби представлен по формуле (11.23), то правильную дробь $F(x)/f(x)$ можно разложить на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{Mx+N}{x^2+mx+n} + \\ & + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{P_\mu x+Q_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \dots \end{aligned} \quad (11.24)$$

Здесь $A, B_1, B_2, \dots$ — неопределенные постоянные, их нужно найти. Из (11.24) видно, что простому корню $x = a$ знаменателя в этой формуле отвечает одна дробь, а простой паре комплексно сопряженных корней знаменателя (корней множителя $x^2 + mx + n$) — тоже одна дробь $(Mx + N)/(x^2 + mx + n)$. Корням кратности s или μ знаменателя в разложении (11.24) отвечает сумма соответственно s или μ простейших дробей. Выражение в правой части (11.24) приведем к общему знаменателю (ясно, что он равен $f(x)$), тогда будем иметь

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\Phi(x)}{f(x)}. \quad (11.25)$$

Очевидно, что $\Phi(x)$ представляет собой многочлен, который получается после приведения подобных членов в числителе. Из (11.25) следует

$$F(x) = \Phi(x). \quad (11.26)$$

Здесь $F(x)$ — заданный многочлен, $\Phi(x)$ — многочлен, коэффициенты которого выражены через искомые коэффициенты. Соотношение (11.24) является тождественным, т.е. выполняется при всех x . Соотношения (11.25), а потому и (11.26) также являются тождественными. Так как соотношение (11.26) выполняется для всех x , то коэффициенты многочленов $F(x)$, $\Phi(x)$ при одинаковых степенях x равны, в чем легко убедиться, подставив значение $x = 0$ в (11.26) и в соотношения, получаемые из последнего последовательным дифференцированием по x . Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях (11.26), получим систему уравнений, содержащих искомые коэффициенты $A, B_1, B_2, \dots$. Этих уравнений будет столько же, сколько имеется неизвестных коэффициентов. Из этой системы и найдем все коэффициенты $A, B_1, B_2, \dots$.

Приведенные рассуждения можно рассматривать как нестрогое обоснование (11.24). Уравнения для нахождения вышеуказанных искомых коэффициентов можно получить и иначе, а именно, подставив в (11.26) вместо x любые числа. При каждой подстановке будем иметь определенное уравнение. В итоге получим число уравнений, равное числу неизвестных коэффициентов. На практике обычно два вышеуказанных подхода комбинируют. Отметим, что в (11.26) вместо x выгодно подставлять не любые значения, а значения, равные действительным корням $f(x)$.

Пример 1. Рассмотрим дробь

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}. \quad (11.27)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x^3-x} &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}, \\ x-3 &= A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1), \\ x-3 &= x^2(A+B+C) + x(-B+C) - A. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа и получим систему уравнений

$$0 = A + B + C; \quad 1 = -B + C; \quad -3 = -A.$$

Отсюда найдем A, B, C . Но проще эти коэффициенты найти из других уравнений, которые получим, подставив в (11.28) вместо x значения, равные корням знаменателя: $x = 0, x = -1, x = 1$. При этом будем

иметь соответственно $-3 = -A$, $-4 = 2B$, $-2 = 2C$. Следовательно, $A = 3$, $B = -2$, $C = -1$. Таким образом, (11.27) примет вид

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

Пример 2. Рассмотрим дробь

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}.$$

Правую часть приведем к общему знаменателю, затем, отбросив общий знаменатель, получим

$$x-5 = A \cdot (x-2)^2 + B_1 \cdot (x+1)(x-2) + B_2 \cdot (x+1). \quad (11.29)$$

В (11.29) положим $x = -1$, затем $x = 2$, тогда

$$\begin{cases} -6 = 9A, \\ -3 = 3B \end{cases} \Rightarrow A = -2/3, \quad B_2 = -1.$$

Чтобы получить уравнение для B_1 , сравним коэффициенты при x^2 слева и справа в (11.29): $0 = A + B_1$. Отсюда найдем $B_1 = -A = 2/3$. Окончательно будем иметь

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4} = -\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Пример 3. Рассмотрим дробь

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1} = \frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Выражение в правой части приведем к общему знаменателю, который затем отбросим:

$$12 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-1). \quad (11.30)$$

Положим $x = -1$, затем $x = 1$. Будем иметь при этом соответственно

$$\begin{cases} 12 = -2A, \\ 12 = 6B \end{cases} \Rightarrow A = -6, \quad B = 2.$$

Еще два уравнения для нахождения C и D получим, сравнив в (11.30) слева и справа коэффициенты при x^3 и свободные члены:

$$0 = A + B + C \Rightarrow C = -A - B \Rightarrow C = 4;$$

$$12 = -A + B - D \Rightarrow D = -12 - A + B = -4.$$

Таким образом,

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1} = -\frac{6}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x-4}{x^2+x+1}. \quad (11.31)$$

§ 11.8. Интегрирование рациональных дробей

Дана рациональная дробь $Q(x)/f(x)$, нужно найти от нее интеграл $\int [Q(x)/f(x)] dx$. Здесь нужно различать два случая:

- Дробь $Q(x)/f(x)$ является правильной. Тогда разложим ее на сумму простейших дробей, и искомым интеграл будет равен сумме интегралов от простейших дробей.
- Дробь $Q(x)/f(x)$ является неправильной. Тогда запишем ее в виде суммы $Q(x)/f(x) = M(x) + F(x)/f(x)$, где $M(x)$ — многочлен, а $F(x)/f(x)$ — правильная рациональная дробь. Последнюю разложим на сумму простейших дробей. После этого проинтегрируем.

Итак, интеграл от рациональной дроби всегда может быть вычислен.

Пример. Вычислить $J = \int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx$.

Воспользуемся формулой (11.31). Тогда

$$\begin{aligned} J &= - \int \frac{6}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{4x-4}{x^2+x+1} dx = \\ &= -6 \ln |x+1| + 2 \ln |x-1| + 4 \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ предлагается вычислить самостоятельно, используя материал § 11.5.

§ 11.9. Интегрирование простейших иррациональных функций

Рациональная функция представляет собой отношение двух многочленов; следовательно, она определяется формулой, содержащей конечное число четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление), выполненных над независимой переменной, постоянными и получаемыми при этом выражениями.

Иррациональной называется функция, которая определяется формулой, содержащей конечное число четырех арифметических действий и извлечений корня с целым показателем, выполненных над независимой переменной, постоянными и выражениями, представляющими собой рациональные функции от независимой переменной.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int R \left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \dots \right) dx.$$

R — рациональная функция своих аргументов, $m, p, \dots, a, b, a_1, b_1$ — заданные действительные числа, причем показатели корней — целые числа. Под всеми корнями стоит одно и то же выражение, в котором и числитель, и знаменатель дроби содержат x в первой степени. Пусть n — наименьшее общее кратное показателей корней $m, p, \dots$, т. е. число, которое делится без остатка на эти показатели. Чтобы избавиться от иррациональности, произведем замену

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = U^n, \quad x = \frac{b_1U^n - b}{a - a_1U^n}. \quad (11.32)$$

Следовательно, $dx = x'_U dU = \frac{ab_1 - a_1b}{(a - a_1U^n)^2} nU^{n-1} dU$. Тогда интеграл J

примет вид $J = \int R\left(\frac{b_1U^n - b}{a - a_1U^n}, U^{n/m}, U^{n/p}, \dots\right) \frac{ab_1 - a_1b}{(a - a_1U^n)^2} nU^{n-1} dU$.

Но числа $n/m, n/p, \dots$ суть целые числа, так как по условию n — наименьшее кратное чисел m, p . Под знаком интеграла мы получим рациональную функцию, которая может быть проинтегрирована. В частности, если $a_1 = 0, b_1 = 1$, то подкоренное выражение и замена (11.32) примут вид $ax + b$ и $ax + b = U^n$ соответственно.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$.

Сделаем замену $\sqrt{x+4} = U$. Тогда $x = U^2 - 4, dx = 2U dU$ и

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{U^2 - 4}{U} 2U dU = 2 \int (U^2 - 4) dU = 2 \frac{U^3}{3} - 4U + C,$$

здесь согласно замене $U = \sqrt{x+4}$.

§ 11.10. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл $J_1 = \int R(\sin x, \cos x) dx$, где R — рациональная функция своих аргументов. Покажем, что J_1 приводится к интегралу от рациональной функции и может быть вычислен. Произведем замену

$$\operatorname{tg}(x/2) = U. \quad (11.33)$$

При этом $x/2 = \operatorname{arctg} U$, следовательно, $x = 2 \operatorname{arctg} U$, поэтому

$$dx = \frac{2}{1+U^2} dU. \quad (11.34)$$

Чтобы представить подынтегральную функцию через U , нужно $\sin x$ и $\cos x$ выразить через U , т.е. через $\operatorname{tg}(x/2)$. Известно, что $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$. Эту формулу запишем так:

$$\sin x = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}.$$

Числитель и знаменатель дроби в правой части разделим на $\cos^2(x/2)$ и получим $\sin x = 2 \operatorname{tg}(x/2)/[1 + \operatorname{tg}^2(x/2)]$. В силу (11.33) будем иметь

$$\sin x = \frac{2U}{1 + U^2}. \quad (11.35)$$

Аналогично поступим с $\cos x$: $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$,

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}.$$

И числитель, и знаменатель правой части последней формулы поделим на $\cos^2(x/2)$, тогда $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$, поэтому

$$\cos x = \frac{1 - U^2}{1 + U^2}. \quad (11.36)$$

Выражения (11.34)–(11.36) подставим в интеграл J_1 , который теперь примет вид $J_1 = \int R\left(\frac{2U}{1+U^2}, \frac{1-U^2}{1+U^2}\right) \frac{2dU}{1+U^2}$. Здесь подынтегральная функция является уже рациональной функцией от U . Вычислив J_1 , подставим в полученное выражение $U = \operatorname{tg}(x/2)$ и вернемся к исходной переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Сделаем замену (11.33). Тогда $\sin x$ и dx будут выражаться формулами (11.34), (11.35), поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2/(1+U^2)}{2U/(1+U^2)} dU = \int \frac{dU}{U} = \ln|U| + c = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C.$$

Замена (11.33) при вычислении интегралов вида J_1 всегда приводит к успеху, т.е. позволяет вычислить этот интеграл до конца. В связи с этим замену (11.33) называют *универсальной*. Однако в силу своей общности она не всегда удобна, поэтому иногда лучше применять не (11.33), а другую замену. Отметим три таких случая.

1. $\int R(\sin x) \cos x dx$. Здесь лучше сделать замену $U = \sin x$, тогда $dU = (\sin x)'_x dx = \cos x dx$ и интеграл примет вид $\int R(U) dU$.

2. $\int R(\cos x) \sin x \, dx$. Здесь надо взять $U = \cos x$, тогда исходный интеграл примет вид $\int R(U) (-dU)$.

3. $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) \, dx$, здесь $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = U$, тогда $x = \operatorname{arctg} U$, $dx = \frac{dU}{1+U^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x$. Следовательно, $\cos^2 x = \frac{1}{1+U^2}$ и $\sin^2 x = \frac{U^2}{1+U^2}$. Поэтому рассматриваемый интеграл запишется так:

$$\int R\left(\frac{1}{1+U^2}, \frac{U^2}{1+U^2}\right) \frac{1}{1+U^2} dU.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \sin x \, dx$. Пусть $U = \cos x$, тогда $dU = -\sin x \, dx$ и последний интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{1-U^2}{U^4} (-1) dU &= \int \frac{dU}{U^2} - \int \frac{dU}{U^4} = -\frac{1}{U} + \frac{1}{3U^3} + C = \\ &= -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$.

Положим $U = \operatorname{tg} x$, тогда $x = \operatorname{arctg} U$, $dx = (1+U^2)^{-1} dU$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx &= \int \frac{U^2(1+U^2)^2}{1+U^2} \cdot \frac{dU}{1+U^2} = \\ &= \int U^2 \, dU = \frac{U^3}{3} + C = (1/3) \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

§ 11.11. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических замен

Рассмотрим интеграл $J_2 = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$. Здесь подынтегральная функция R — рациональная функция своих аргументов, a, b, c — заданные действительные числа, $a \neq 0$.

Преобразуем подкоренное выражение. Вынесем за скобки a , а затем полученное выражение дополним до полного квадрата суммы:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Введем обозначения $a = \pm m^2$, $c - b^2/(4a) = \pm n^2$. Здесь знаки правых частей мы должны считать совпадающими со знаками соответствующих левых частей: например, если $a > 0$, то берем $a = +m^2$, если $a < 0$, то $a = -m^2$. Кроме того, в рассматриваемом интеграле сделаем замену $x + b/(2a) = t$. Отсюда $x = t - b/(2a)$, значит, $dx = x'_t dt = dt$. Теперь исходный интеграл принимает вид $J_2 = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{\pm m^2 t^2 \pm n^2}\right) dt$.

Далее, перебрав знаки перед слагаемыми под корнем, получим четыре различных случая, так как каждый из знаков первого слагаемого сочетается с каждым из знаков второго слагаемого. Однако один из случаев, когда под знаком корня стоит $-m^2 t^2 - n^2$, мы должны отбросить, так как получаем отрицательное подкоренное выражение и, соответственно, мнимую величину. Таким образом, остается рассмотреть лишь три следующих варианта:

$$J_2 = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}\right) dt; \quad J_2 = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}\right) dt;$$

$$J_2 = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}\right) dt.$$

Чтобы избавиться от корня, необходимо сделать следующие замены соответственно:

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} U; \quad t = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos U}; \quad t = \frac{n}{m} \sin U.$$

Пример. Вычислить $\int (\sqrt{n^2 - x^2})^{-3} dx$.

Сделаем замену $x = n \sin U$, при этом $dx = x'_U dU = n \cos U dU$, отсюда $\int \frac{dx}{(\sqrt{n^2 - x^2})^3} = \int \frac{n \cos U dU}{n^3 \cos^3 U} = \frac{1}{n^2} \int \frac{dU}{\cos^2 U} = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} U + C$. Здесь согласно замене $U = \arcsin(x/n)$.

Замечание. В дальнейшем мы докажем, что для любой непрерывной функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$, т. е. неопределенный интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

(§ 12.4). Но, оказывается, этот неопределенный интеграл не всегда представляет собой элементарную функцию, т. е. не всегда может быть представлен одной формулой, выраженной через конечное число основных элементарных функций. К таким интегралам относятся

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx$$

и др.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 12.1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, где a и b — соответственно абсциссы точек A и B . Будем считать, что в указанном интервале всюду $f(x) > 0$. Это значит, что кривая AB лежит выше оси Ox (приведенные далее рассуждения справедливы и для случая, когда $f(x) \geq 0$). Рассмотрим фигуру, ограниченную сверху кривой AB , снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox , а с боков — отрезками aA и bB , параллельными оси Oy (рис. 12.1). Эту фигуру назовем *криволинейной трапецией* и ее площадь обозначим S_{aABb} .

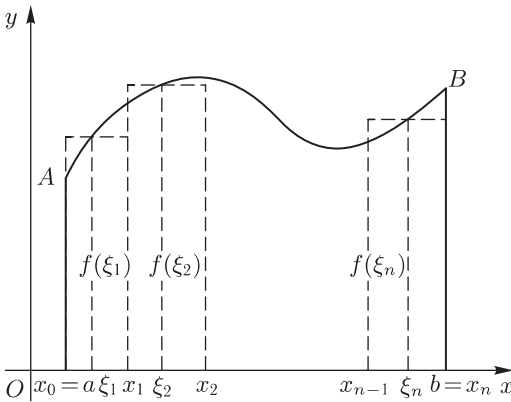


Рис. 12.1

Будем искать площадь криволинейной трапеции. Разобьем интервал $[a, b]$ на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, что каждая следующая точка лежит правее предыдущей; пусть при этом $a = x_0$, $b = x_n$. Здесь мы получим n интервалов, которые будем называть *частичными интервалами*: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Длины каждого из этих интервалов обозначим $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\dots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. В указанных интервалах возьмем соответственно произ-

вольные точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (которые могут совпадать также с концами интервалов). Найдём $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ — ординаты точек кривой $y = f(x)$ с абсциссами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. На первом, втором, ..., n -м частичных интервалах, как на основаниях, построим прямоугольники, высоты которых равны соответственно $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$. Площадь полученной фигуры, составленной из этих n прямоугольников, обозначим S_n . Она будет равна сумме площадей прямоугольников, из которых эта фигура составлена:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n. \quad (12.1)$$

Коротко сумму (12.1) будем записывать с помощью символа суммирования $\sum$ следующим образом:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (12.2)$$

Чтобы вместо (12.2) получить (12.1), нужно вместо индекса i поочередно подставить значения $1, 2, \dots, n$ и полученные произведения сложить.

Ясно, что площадь S_n зависит от способа разбиения интервала $[a, b]$, так как точки разбиения $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ влияют на длины оснований прямоугольников. Кроме того, площадь S_n зависит от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, так как их выбор влияет на высоты $f(\xi_i)$ прямоугольников. Пусть $\max \Delta x_i$ есть наибольшая из длин частичных интервалов, на которые мы разбили интервал $[a, b]$. Число делений n устремим к бесконечности так, чтобы $\max \Delta x_i$ стремился к нулю. При этом все частичные интервалы стягиваются в точки, а ступенчатая фигура с площадью S_n приближается по форме к криволинейной трапеции. Таким образом, естественно за площадь криволинейной трапеции S_{aAbb} принять величину

$$S_{aAbb} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (12.3)$$

Можно показать, что предел правой части не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$ на частичные интервалы, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

§ 12.2. Определение и геометрический смысл определенного интеграла

Пусть в интервале $[a, b]$ ($a < b$) задана функция $f(x)$, которая, в отличие от предыдущей (§ 12.1), может принимать в этом интервале как положительные, так и отрицательные и нулевые значения.

Интервал $[a, b]$ разобьем на n частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Каждая последующая точка лежит правее предыдущей. Длины n частичных интервалов соответственно равны $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Внутри первого, второго, $\dots$, n -го частичных интервалов возьмем произвольные точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (они могут совпасть и с концами самих интервалов). В этих точках вычислим значения заданной функции $f(x)$ и образуем сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (12.4)$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$, где функция задана.

Если при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ интегральная сумма (12.4) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения интервала $[a, b]$ на частичные интервалы, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по интервалу $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$. Итак, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (12.5)$$

В этом случае говорят, что *функция $f(x)$ интегрируема в интервале $[a, b]$* . Числа a, b называют соответственно *нижним и верхним пределами интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, dx — *дифференциалом переменной x* , x — *переменной интегрирования*, $[a, b]$ — *интервалом интегрирования*.

Теорема 12.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, то она в этом интервале интегрируема.*

Иначе говоря, для этой функции существует конечный предел интегральной суммы, составленной для нее по интервалу $[a, b]$. Этот предел не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Теорема принимается без доказательства.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в следующем. Если $f(x) \geq 0$ всюду в $[a, b]$, то правая часть формулы (12.5), согласно (12.3), равна площади криволинейной трапеции; следовательно,

но, $\int_a^b f(x) dx = S_{aABb}$. Эта трапеция ограничена снизу интервалом $[a, b]$,

сверху — кривой AB с уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — подынтегральная функция, с боков — отрезками aA и bB .

В правую часть формулы (12.5) не входит переменная интегрирования x . Это означает, что определенный интеграл представляет собой число и не зависит от обозначения переменной интегрирования. Буква может быть любой, например, x или t , при этом

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

До сих пор мы считали, что $a < b$, и понятие определенного интеграла было дано для случая, когда верхний предел больше нижнего. Если же верхний предел будет меньше нижнего ($b < a$), то по определению примем

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

т. е. при перестановке пределов определенный интеграл изменяет свой знак на противоположный.

Если $a = b$, то по определению $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Наконец, отметим, что при $f(x) \equiv 1$ всюду в $[a, b]$ будем иметь

$$\int_a^b dx = b - a. \quad (12.6)$$

В самом деле, в этом случае (12.5) дает

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} (b - a) = b - a.$$

Здесь мы учли, что сумма длин всех частичных интервалов есть длина интервала $[a, b]$, равная $b - a$, а предел постоянной есть сама эта постоянная.

§ 12.3. Свойства определенного интеграла

При доказательстве свойств определенных интегралов пределы берутся при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, далее эти условия указываться не будут.

— Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т. е. если $A = \text{const}$, то $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$.

— Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций. Например, для суммы из двух слагаемых

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (12.7)$$

Доказательство (предыдущее свойство доказывается аналогично). Заменив в формуле (12.5) $f(x)$ на сумму $f(x) + \varphi(x)$, получим

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \lim \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + \varphi(\xi_i)] \Delta x_i.$$

В правой части соберем отдельно члены, содержащие f , и отдельно члены, содержащие φ :

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx &= \\ &= \lim (f(\xi_1) \Delta x_1 + \varphi(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n + \varphi(\xi_n) \Delta x_n) = \\ &= \lim \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i \right). \end{aligned}$$

Предел в правой части последней формулы, согласно теории пределов, равен сумме пределов первой и второй сумм. Но предел первой суммы равен $\int_a^b f(x) dx$, а предел второй равен $\int_a^b \varphi(x) dx$. Таким образом, свойство доказано.

— Если $f(x) \geq \varphi(x)$ всюду в $[a, b]$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (12.8)$$

Доказательство. Согласно условию имеем $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ всюду в интервале $[a, b]$. Запишем определенный интеграл от разности $f(x) - \varphi(x)$ согласно (12.5):

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \lim \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)] \Delta x_i.$$

Так как все длины $\Delta x_i > 0$ и все разности $f(\xi_i) - \varphi(\xi_i) \geq 0$, значит, интегральная сумма под знаком предела будет неотрицательной. Как известно из теории пределов, если функция неотрицательная, то и ее предел обязательно будет неотрицательным. Итак, $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \geq 0$.

Согласно предыдущему свойству интеграл от разности равен разности интегралов, поэтому $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$. Отсюда получаем (12.8).

— Если M и m суть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$ ($a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (12.9)$$

Доказательство. Так как m есть наименьшее значение функции в интервале $[a, b]$, то $f(x) \geq m$ всюду в $[a, b]$. Следуя предыдущему свойству, имеем $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx$. Согласно первому свойству постоянный множитель m в правой части вынесем за знак определенного интеграла, а оставшийся интеграл $\int_a^b dx = b - a$, и получим $\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a)$. Аналогично $M(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx$. Объединив последнее соотношение с предыдущим, приходим к (12.9).

— Следующее свойство запишем в виде теоремы.

Теорема 12.2 (о среднем значении). *Если функция $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$ ($a < b$), то в этом интервале найдется по крайней мере одно значение ξ $a \leq \xi \leq b$, для которого справедлива формула*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (12.10)$$

Доказательство. Пусть M и m — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, тогда для рассматриваемой функции справедливо соотношение (12.9). Умножим

все части этого соотношения на положительное число $\frac{1}{b-a}$ (при этом знаки неравенств сохраняются) и получим $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

Обозначив

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu, \quad (12.11)$$

имеем $m \leq \mu \leq M$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, то по теореме 6.3 в этом интервале найдется по крайней мере одна точка ξ , $a \leq \xi \leq b$, в которой функция $f(x)$ принимает значение μ , т. е. $f(\xi) = \mu$. Подставим в правую часть (12.11) $f(\xi)$, полученное при этом соотношение умножим на $(b-a)$. Тогда придем к формуле (12.10).

Это свойство важно в теоретических исследованиях, но для вычисления определенного интеграла формула (12.10) не может быть использована, так как значение ξ в правой части этой формулы неизвестно (как и в формулах Коши и Лагранжа). Известно лишь, что такая точка существует.

Два последних свойства имеют простое геометрическое истолкование в случае, когда $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$.

Пусть кривая с уравнением $y = f(x)$ имеет вид, показанный на рис. 12.2. Из геометрического смысла интеграла следует, что площадь

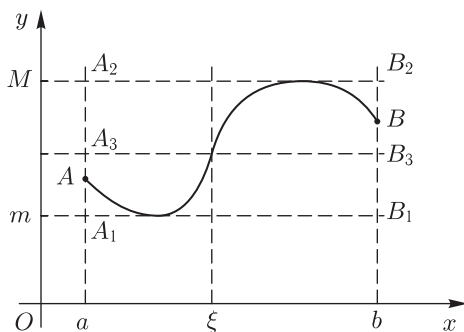


Рис. 12.2

криволинейной трапеции $S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx$, а площади показанных на рис. 12.2 прямоугольников $S_{aA_1B_1b} = m(b-a)$, $S_{aA_2B_2b} = M(b-a)$, $S_{aA_3B_3b} = f(\xi)(b-a)$. Из соотношений (12.9) и (12.10) следует, что $S_{aA_1B_1b} < S_{aABb} < S_{aA_2B_2b}$, $S_{aABb} = S_{aA_3B_3b}$.

— Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Здесь предполагается, что функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждом из трех интервалов, концами которых являются числа a, b, c , поэтому все три интеграла существуют.

Доказательство. Будем различать *два случая*: 1) $a < c < b$; 2) c лежит вне интервала (a, b) .

По определению интеграла $\int_a^b f(x) dx = \lim_{i=1}^n \sum f(\xi_i) \Delta x_i$. Мы знаем,

что предел правой части последней формулы не зависит от способа разбиения интервала (a, b) . Используя это свойство, в первом случае разбиение интервала будем проводить так, чтобы c всегда была точкой деления. Иначе говоря, будем делить отдельно интервал (a, c) и отдельно (c, b) , а в интегральной сумме соберем отдельно слагаемые, относящиеся к интервалу (a, c) , и отдельно слагаемые, относящиеся к $[c, b]$.

В результате получим $\int_a^b f(x) dx = \lim \left(\sum_{ac} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{cb} f(\xi_i) \Delta x_i \right)$,

где под знаком предела первая сумма содержит слагаемые, относящиеся к (a, c) , а вторая сумма — слагаемые, относящиеся к (c, b) . Предел правой части равен сумме пределов первой и второй сумм. Но согласно определению определенного интеграла предел первой суммы равен $\int_a^c f(x) dx$, а предел второй суммы равен $\int_c^b f(x) dx$. Таким образом, получили нужное нам соотношение.

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть точка c лежит вне интервала (a, b) , например, правее точки b , т.е. $a < b < c$. Тогда по доказанному выше имеем $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. Во втором интеграле правой части переставим местами пределы интегрирования. При этом знак интеграла изменится на противоположный, и получим

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$

Перенеся второй интеграл правой части влево, получим требуемое соотношение.

§ 12.4. Производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу.

Формула Ньютона–Лейбница

Возьмем интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Зафиксируем его нижний предел a .

Верхний же предел будем считать величиной переменной. В этом случае рассматриваемый интеграл изменяется с изменением b и является функцией от верхнего предела b . Обозначим эту функцию

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Поясним сказанное геометрически. Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла, когда $f(x) > 0$ всюду в $[a, b]$, указанный интеграл $\Phi(b)$ равен площади S_{aABb} криволинейной трапеции, основанием которой служит интервал $[a, b]$. Из рис. 12.3 видно, что

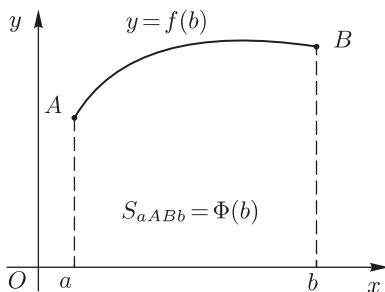


Рис. 12.3

с изменением b площадь S_{aABb} изменится, следовательно, изменится рассматриваемый интеграл, значит, он является функцией своего переменного предела.

Обозначим теперь переменный предел b через x . Получим $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$. Здесь под знаком интеграла стоит переменная интегрирования x . Чтобы ее не путать с переменным верхним пределом x , переменную интегрирования обозначим буквой t . Таким образом,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (12.12)$$

Для этой функции справедлива

Теорема 12.3. Если $f(x)$ — непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, то $\Phi'(x) = f(x)$ или $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$. Иначе говоря, производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу x равна подынтегральной функции, взятой от аргумента x .

Доказательство. В выражении для $\Phi(x)$ вместо x возьмем $x + \Delta x$, тогда получим $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$, считая для определенности $\Delta x > 0$. Теперь интервал интегрирования разделим точкой x на два и запишем интеграл в последней формуле в виде $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$. Первый интеграл в правой части есть $\Phi(x)$ согласно (12.12), поэтому

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (12.13)$$

Интеграл в правой части этой формулы запишем, согласно теореме 12.2, следующим образом:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi)(x + \Delta x - x), \quad x \leq \xi \leq x + \Delta x.$$

Теперь формула (12.13) примет вид: $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(\xi)\Delta x$. Поделив на Δx , получим $[\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)]/\Delta x = f(\xi)$. Перейдем здесь к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, тогда $x + \Delta x \rightarrow x$, $\xi \rightarrow x$, и получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x))/\Delta x] = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$. Заметим, что левая часть этой формулы равна производной $\Phi'(x)$. По условию теоремы $f(x)$ — непрерывная функция, значит, $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$. Итак, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Мы показали, что если в формуле (12.12) подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна, то производная от интеграла в этой формуле по переменному верхнему пределу x есть $f(x)$. Это означает, что указанный интеграл, равный $\Phi(x)$, является первообразной (неопределенным интегралом) для функции $f(x)$. Таким образом, попутно мы доказали, что для любой непрерывной функции $f(x)$ существует ее первообразная. Эту первообразную всегда можно записать по формуле (12.12), т. е. в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом, хотя эту первообразную не всегда можно выразить через элементарные функции.

Теорема 12.4. Если $F(x)$ — первообразная для непрерывной функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, т. е. $F'(x) = f(x)$ для всех x из $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (12.14)$$

Доказательство. По условию $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, но, как мы видели, функция (12.12) также является первообразной для функции $f(x)$. Согласно теореме 11.1 две первообразные одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, следовательно, для всех x из $[a, b]$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad (12.15)$$

где $C = \text{const}$. Эта формула справедлива для всех x из $[a, b]$, значит, и для $x = a$, следовательно, $\int_a^a f(t) dt = F(a) + c$. Левая часть последней формулы равна нулю, поэтому $0 = F(a) + c$ и $c = -F(a)$. Подставим это выражение в формулу (12.15): $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. Эта формула справедлива для всех x из $[a, b]$, а потому и для $x = b$, следовательно, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. Так как переменная интегрирования может быть обозначена любой буквой, заменим t на x . Теорема доказана.

Правую часть формулы (12.14) коротко записывают так: $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, отсюда $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$.

Формула (12.14) показывает, что вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, т.е. к вычислению неопределенного интеграла.

Например, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

§ 12.5. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема 12.5. Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция в интервале $[a, b]$. Пусть переменная интегрирования x заменена по формуле $x = \varphi(t)$, причем:

— $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (иначе говоря, значения $t = \alpha$ и $t = \beta$ отвечают соответственно верхнему $x = a$ и нижнему $x = b$ пределам интеграла);

- $\varphi'(t)$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$;
- функция $\varphi(t)$ монотонна в интервале $[\alpha, \beta]$, т. е. в этом интервале производная $\varphi'(t)$ сохраняет знак.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (12.16)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная для подынтегральной функции $f(x)$ исходного интеграла. Тогда согласно формуле (12.14) запишем

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (12.17)$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $F[\varphi(t)]$, получаемую из $F(x)$ заменой $x = \varphi(t)$. Она является сложной функцией от t . Возьмем производную от этой функции по t : $(F[\varphi(t)])'_t = F'_x \varphi'(t) = f(x) \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$. Таким образом, эта производная равна подынтегральной функции в правой части формулы (12.16), т. е. для этой подынтегральной функции выражение $F[\varphi(t)]$ есть первообразная, поэтому интеграл в правой части (12.16), согласно формуле Ньютона–Лейбница, равен

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Правая часть этой формулы совпадает с правой частью формулы (12.17), следовательно, их левые части также равны, т. е. получаем формулу (12.16). Теорема доказана.

Итак, при замене переменной в определенном интеграле по формуле $x = \varphi(t)$ мы должны положить в интеграле $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$. Кроме того, пределы a и b исходного интеграла для x следует заменить соответствующими пределами для переменной t , а именно, $t = \alpha$ и $t = \beta$. Чтобы установить пределы α и β для новой переменной, целесообразно выразить из формулы $x = \varphi(t)$ переменную t через x , т. е. найти функцию $t = t(x)$, обратную к $x = \varphi(t)$. Тогда $t(a) = \alpha$ и $t(b) = \beta$. После интегрирования возвращаться к старой переменной уже нет необходимости.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Чтобы избавиться от корня, сделаем замену $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = (1/\cos^2 t) dt$. Нужно найти пределы для t . Для этого выразим t через

x и получим $t = \arctg x$. При $x = 0$ будем иметь $\alpha = \arctg 0 = 0$, а при $x = 1$ получим $\beta = \arctg 1 = \pi/4$. Учтем, что $1 + \tg^2 x = 1/\cos^2 x$, тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{(1/\cos^2 t) dt}{(1+\tg^2 t)\sqrt{1+\tg^2 t}} = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Интегрирование по частям. Даны две функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$, которые имеют непрерывные производные U'_x, V'_x в $[a, b]$. Производная произведения равна $(U \cdot V)'_x = U'_x \cdot V + U \cdot V'_x$, поэтому

$$\int_a^b (U \cdot V)'_x dx = \int_a^b U'_x \cdot V dx + \int_a^b U \cdot V'_x dx. \quad (12.18)$$

По формуле Ньютона–Лейбница будем иметь $\int_a^b (U \cdot V)'_x dx = (UV)|_a^b$. Подставим последнее выражение в левую часть (12.18) и учтем, что $U'_x dx = dU$, $V'_x dx = dV$, получим $(UV)|_a^b = \int_a^b V dU + \int_a^b U dV$. Отсюда придем к формуле интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b U dV = (UV)|_a^b - \int_a^b V dU \quad (12.19)$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 x \ln x dx$. Положим $U = \ln x$, $dV = x dx$.

Тогда $V = \int x dx = (1/2)x^2$, $dU = (1/x) dx$. Тогда формула (12.19) дает

$$\int_1^2 x \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

§ 12.6. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, x изменяется в интервале $[a, b]$, в котором $f(x)$ непрерывна, где a и b — абсциссы точек A и B соответственно (рис. 12.4). Пусть $f(x) > 0$ в интервале $[a, b]$, поэтому AB расположена выше оси Ox . В этом случае

$$\int_a^b f(x) dx = S_{aABb}, \quad (12.20)$$

где S_{aABb} — площадь криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок ab . Сверху эта трапеция ограничена кривой AB .

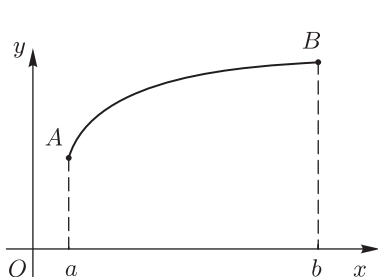


Рис. 12.4

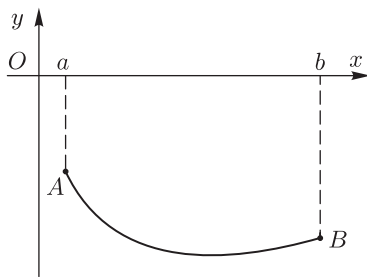


Рис. 12.5

Пусть теперь AB задана уравнением $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$, в котором всюду $f(x) < 0$ (рис. 12.5). Тогда AB лежит ниже оси Ox .

Как и в §§ 12.1, 12.2, нетрудно показать, что $\int_a^b f(x) dx = -S_{aABb}$, где S_{aABb} — площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху отрезком ab , а снизу — кривой AB .

Эти формулы используются для вычисления площадей плоских фигур. Пусть, например, требуется найти площадь $S_{A_2A_1B_1B_2}$ заштрихованной фигуры, ограниченной сверху кривой A_1B_1 с уравнением $y = f_1(x)$, снизу — кривой A_2B_2 с уравнением $y = f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в интервале $[a, b]$, а также отрезками A_1A_2 и B_1B_2 , параллельными оси Oy (рис. 12.6). Ясно, что искомая площадь $S_{A_2A_1B_1B_2} = S_{aA_1B_1b} - S_{aA_2B_2b}$. Площади в правой части, согласно (12.20), выражаются через соответствующие определенные интегралы, поэтому $S_{A_2A_1B_1B_2} = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$. Отсюда

$$S_{A_2A_1B_1B_2} = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx. \quad (12.21)$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда A_2 совпадает с A_1 , а B_2 — с B_1 . В качестве примера найдем площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x$ и $y = x^2$, пересекающимися в точке $O(0, 0)$ и

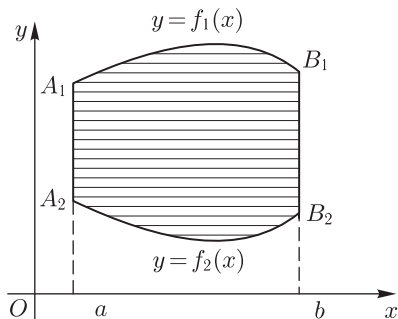


Рис. 12.6

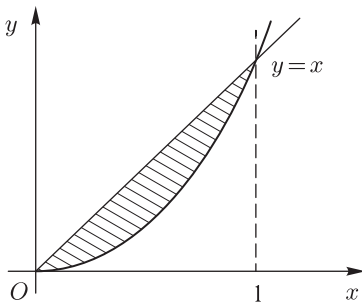


Рис. 12.7

точке с координатами $x = 1$, $y = 1$, поскольку координаты каждой из указанных точек удовлетворяют уравнениям обеих кривых (рис. 12.7). Эта фигура лежит между прямыми $x = a = 0$ и $x = b = 1$. Ее площадь S определяется по формуле (12.21), в которой $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$. Итак,

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Пусть теперь на плоскости Oxy кривая AB (рис. 12.8) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (12.22)$$

При этом

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta). \quad (12.23)$$

Здесь, как и ранее, $a < b$. Функция $\psi(t)$ и производная $\varphi'(t)$ непрерывны в интервале $[\alpha, \beta]$. Из первого уравнения (12.22) выразим t через x и найдем функцию $t = t(x)$, обратную к $x = \varphi(t)$. Полученное выражение подставим во второе уравнение (12.22) и найдем $y = \psi[t(x)]$. Воспользуемся формулой (12.20), где вместо $f(x)$ возьмем $\psi[t(x)]$:

$$S_{aABb} = \int_a^b \psi[t(x)] dx. \quad (12.24)$$

Сделаем замену $x = \varphi(t)$ согласно первому уравнению (12.22), при этом $dx = \varphi'(t) dt$ и подынтегральная функция $\psi[t(x)] = \psi(t)$. По теореме о замене переменной в определенном интеграле пределы $x = a$, $x = b$ интеграла формулы (12.24) мы должны заменить соответствующими пределами $t = \alpha$, $t = \beta$ согласно (12.23). Следовательно, (12.24) примет вид

$$S_{aABb} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (12.25)$$

Эта формула позволяет найти площадь криволинейной трапеции, когда кривая AB задана параметрически уравнениями (12.22) (рис. 12.8). В ней α может быть как меньше, так и больше β , важно лишь, что значению $t = \alpha$ отвечает точка A с абсциссой a , меньшей абсциссы b точки B .

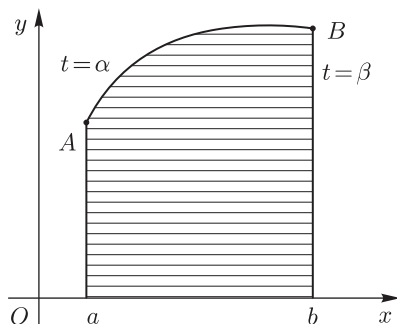


Рис. 12.8

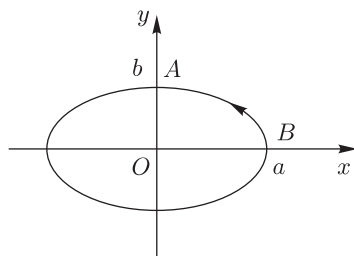


Рис. 12.9

Пример. Вычислим площадь S эллипса, заданного параметрическими уравнениями (§ 5.12)

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (12.26)$$

Точка (x, y) , определяемая по (12.26), при изменении t от 0 до 2π пробегает весь эллипс, начиная от точки B (рис. 12.9), против хода часовой стрелки. При $t = \pi/2$ точка эллипса совпадает с точкой A . Найдём $S/4$ — площадь четверти эллипса, лежащего в первой четверти плоскости Oxy . Эта фигура сверху ограничена кривой AB . Точке A отвечает $t = \pi/2$, следовательно, $\alpha = \pi/2$. Точке B отвечает $t = 0$, следовательно, $\beta = 0$. Здесь $\varphi(t) = a \cos t$, $\psi(t) = b \sin t$, и по формуле (12.25) имеем

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot a(-\sin t) dt = ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow S = \pi ab. \end{aligned}$$

§ 12.7. Площадь криволинейного сектора

Пусть на плоскости Oxy задана точка $M(x, y)$. Пусть ρ — длина отрезка OM и θ — угол между осью Ox и вектором $\vec{OM}$, отсчитываемый от оси Ox и считающийся положительным, когда отсчет ведется против хода часовой стрелки. Из рис. 12.10 видно, что

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (12.27)$$

Числа ρ и θ — полярные координаты точки M , у которой x, y — декартовы координаты. Формула (12.27), как отмечалось в § 1.2, связывает декартовы координаты M с ее полярными координатами.

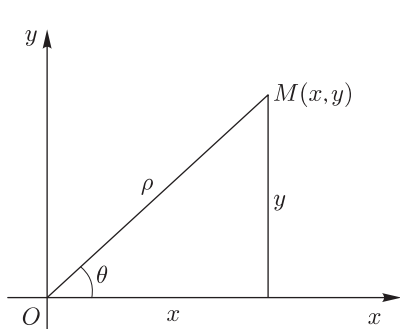


Рис. 12.10

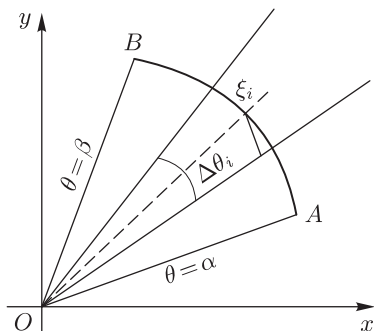


Рис. 12.11

Пусть полярная координата ρ (полярный радиус) точки M есть функция $\rho = f(\theta)$ от полярного угла θ . Тогда с изменением θ расстояние $OM = \rho = f(\theta)$ точки M до начала координат изменится и M на плоскости опишет некоторую линию. Соотношение $\rho = f(\theta)$ называется *уравнением линии в полярных координатах*.

Пусть кривая AB на плоскости Oxy задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$, где $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (рис. 12.11). Функцию $f(\theta)$ считаем непрерывной в указанном интервале. Кривая AB находится между прямыми OA и OB , уравнения которых в полярных координатах будут соответственно $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ (по аналогии с уравнениями $x = a$ и $x = b$ прямых, параллельных оси Oy). Получили криволинейный сектор OAB , ограниченный отрезками OA , OB и линией AB . Требуется найти его площадь S_{OAB} .

Разобьем сектор на n частичных секторов, проведя через точку O лучи $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_{n-1}$, причем $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n$, где $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta$. Рассмотрим сектор, ограниченный лучами $\theta = \theta_i$ и $\theta = \theta_{i-1}$, с углом $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Заменяем его круговым сектором, радиус которого равен $f(\xi_i)$, $\theta_{i-1} \leq \xi_i \leq \theta_i$, а площадь равна $\frac{1}{2} f^2(\xi_i) \Delta\theta_i$.

Это построение выполним для всех частичных секторов и получим ступенчатую фигуру, составленную из n круговых секторов. Вычислим

ее площадь $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\xi_i) \Delta\theta_i$. Устремим число секторов n к бесконечности так, чтобы наибольший из углов частичных секторов $\max \Delta\theta_i$

стремился к нулю, при этом все секторы будут стягиваться в отрезки, а ступенчатая фигура по форме будет приближаться к криволинейному сектору. Таким образом, площадь этого криволинейного сектора будет равна

$S_{OAB} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\theta_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\xi_i) \Delta\theta_i$. Под знаком предела стоит

интегральная сумма для непрерывной функции $f^2(\theta)/2$ в интервале $[\alpha, \beta]$. Поэтому этот предел равен определенному интегралу от названной функции, взятой в интервале $[\alpha, \beta]$. Итак,

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta. \quad (12.28)$$

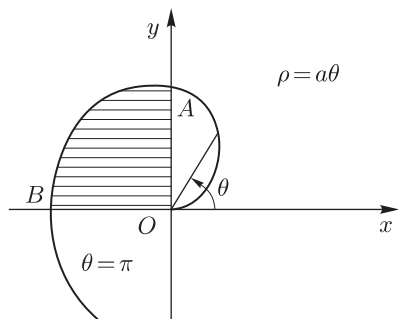


Рис. 12.12

Пример. Рассмотрим кривую, определенную уравнением $\rho = a\theta$, a — заданное положительное число. Легко выяснить форму этой кривой. Пусть θ увеличивается, начиная от значения $\theta = 0$. Тогда расстояние $OM = \rho = a\theta$ точки M до начала координат увеличивается

и M отдаляется от $(0,0)$ тем дальше, чем больше θ , и кривая уходит в бесконечность. Эта кривая называется *спиралью Архимеда* (рис. 12.12). Найдем площадь заштрихованного криволинейного сектора, ограниченного указанной кривой и лучами $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi$. По формуле (12.28) найдем

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\theta^3}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{a^2}{6} \left(\pi^3 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \right) = \frac{7a^2\pi^3}{48}.$$

§ 12.8. Вычисление длины дуги кривой

Пусть на плоскости Oxy кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем a, b — абсциссы точек A, B соответственно. Будем считать, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную всюду в интервале $[a, b]$. Кривую AB (рис. 12.13) разобьем на n частей точками $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$, причем каждая последующая точка

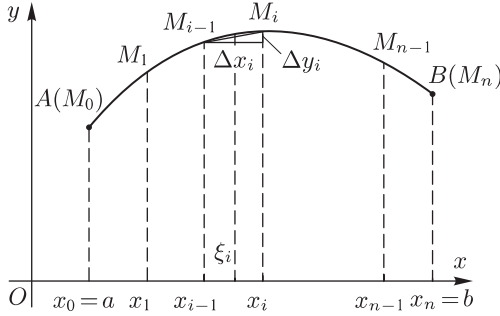


Рис. 12.13

лежит правее предыдущей. Точки A, B будем обозначать соответственно M_0, M_n . Каждые две соседние точки деления соединим хордой и получим ломаную, состоящую из хорд, вписанных в кривую AB . Длина ломаной, которую обозначим l_n , равна сумме длин ее звеньев, т. е. $l_n = \Delta s_1 + \dots + \Delta s_i + \dots + \Delta s_n$, где Δs_i — длина звена $M_{i-1}M_i$.

Запишем эту длину с помощью символа суммирования: $l_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i$.

Пусть число n делений кривой AB стремится к бесконечности так, что длина наибольшего звена $\max \Delta s_i$ стремится к нулю. Тогда ломаная, вписанная в кривую AB , по форме будет приближаться к этой кривой, и за длину l дуги кривой AB естественно принять

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta s_i. \quad (12.29)$$

Пусть $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}$ — абсциссы точек соответственно $M_1, \dots, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$. Обозначим $x_0 = a, x_n = b$ и тем самым разобьем интервал $[a, b]$ этими точками на n частей, при этом длина i -й части равна

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \quad (12.30)$$

Отметим, что при $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ имеем $\max \Delta x_i \rightarrow 0$; здесь $\max x_i \rightarrow 0$ обозначает то же, что и в § 12.1.

Точки M_{i-1}, M_i имеют соответственно ординаты $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$. Ясно, что величина

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta y_i \quad (12.31)$$

есть катет прямоугольного треугольника, показанного на рис. 12.13. Другой катет равен Δx_i . Из указанного треугольника находим гипотенузу, равную Δs_i — длине i -го звена ломаной:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (12.32)$$

По формуле Лагранжа запишем разность

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Левая часть формулы есть Δy_i согласно (12.31), а разность в правой части равна Δx_i согласно (12.30). Поэтому $\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$. Подставим последнюю формулу в (12.32):

$$\Delta s_i = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}. \quad (12.33)$$

Используя (12.33), запишем (12.29) в виде

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \quad (12.34)$$

Здесь в правой части под знаком предела стоит записанная для интервала $[a, b]$ интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, непрерывной в этом интервале. Поэтому ее предел равен определенному интегралу от этой функции, взятому по интервалу $[a, b]$. Следовательно,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (12.35)$$

Эта формула позволяет вычислить длину дуги кривой AB , заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, a, b — абсциссы точек A, B . В формуле (12.35), как ясно из предыдущего, берется положительное значение корня и, кроме того, в ней полагают $a < b$.

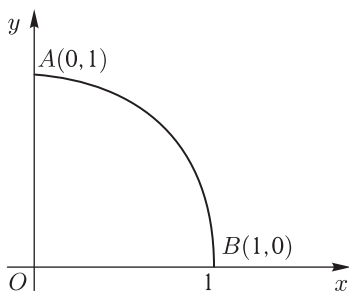


Рис. 12.14

Пример. Найдём длину l четверти окружности с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом 1, расположенной в первой четверти плоскости Oxy (рис. 12.14). Уравнение такой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда $y = +\sqrt{1 - x^2}$ (берём знак «+», так как рассматриваем первую четверть). Здесь $a = 0$, $b = 1$ и $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Найдём $f'(x)$ и подставим в формулу (12.35). Получим

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

§ 12.9. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

Пусть кривая AB (рис. 12.13) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (12.36)$$

причем

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta), \quad (12.37)$$

где a и b — абсциссы точек A и B соответственно ($a < b$). Из первого уравнения в (12.36) выразим t через x и найдем функцию $t = t(x)$, обратную к $x = \varphi(t)$, затем подставим ее во вторую функцию в (12.36) и получим $y = \psi[t(x)]$. Найдем ее производную по правилу дифференцирования сложной функции с учетом равенства $t'(x) = 1/\varphi'(t)$. Получим $y'(x) = [\psi(t(x))]'_x = \psi'_t t'_x = \psi'_t (\varphi'_t)^{-1}$. Эту производную подставим в (12.35) вместо $f'(x)$. При этом подынтегральная функция окажется выраженной через t , а не через x . В связи с этим в интеграле (12.35) от переменной x перейдем к переменной t , сделав там замену $x = \varphi(t)$ согласно первому уравнению (12.36). При этом $dx = \varphi'(t) dt$. Кроме того, по теореме о замене переменной в определенном интеграле, согласно (12.37), пределы $x = a$ и $x = b$ интеграла (12.35) нужно заменить соответствующими пределами $t = \alpha$ и $t = \beta$. Итак,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [\psi'(t)]^2 [\varphi'(t)]^{-2}} \varphi'(t) dt. \quad (12.38)$$

Выражение под корнем приведем к общему знаменателю и извлечем корень отдельно из числителя и из знаменателя. Корень $\sqrt{[\varphi'(t)]^2} = +\varphi'(t)$, если $\varphi'(t) > 0$. Но неравенство $\varphi'(t) > 0$ означает, что функция $x = \varphi(t)$ возрастает в $[\alpha, \beta]$. Иначе говоря, значению $t = \alpha < \beta$ отвечает $x = a < b$, т. е. здесь обязательно, чтобы выполнялось условие $\alpha < \beta$. В формуле (12.38) $\varphi'(t)$ сокращается со знаменателем, следовательно,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (12.39)$$

Корень $\sqrt{[\varphi'(t)]^2} = -\varphi'(t)$, если $\varphi'(t) < 0$, т. е. если функция $x = \varphi(t)$ убывает. При этом обратная ей функция $t = t(x)$ также является убывающей, так как ее производная $t'_x < 0$ в интервале $[a, b]$. Следовательно, значению $x = a < b$ отвечает $t = \alpha > \beta$. Таким образом, здесь $\alpha > \beta$. Итак, в формуле (12.39) в случае, когда $\varphi'(t) < 0$ в интервале $[\beta, \alpha]$, перед интегралом появится знак «—».

Пример. Найдем длину l дуги окружности в первой четверти плоскости Oxy , если центр окружности находится в начале координат

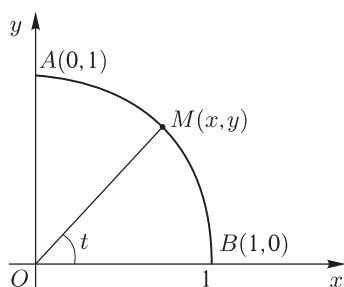


Рис. 12.15

и радиус равен 1. Окружность определяется параметрическими уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, где t — центральный угол, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки и показанный на рис. 12.15. Ясно, что точка A отвечает значению $t = \pi/2$ т. е. $\alpha = \pi/2$. Точка B отвечает значению $t = 0$, следовательно, $\beta = 0$ ($\alpha > \beta$). В данном примере $\varphi'(t) = -\sin t$, т. е. $\varphi'(t) < 0$ в интервале $(0, \pi/2]$. Следовательно, в (12.39) перед интегралом

нужно поставить « $-$ ». Итак, $l = - \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

§ 12.10. Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений.

Объем тела вращения

Пусть в системе координат $Oxyz$ задано тело, расположенное между плоскостями, перпендикулярными оси Ox , уравнения которых $x = a$, $x = b$ (рис. 12.16). Указанные плоскости имеют с телом общие точки. Пусть $S(x)$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной

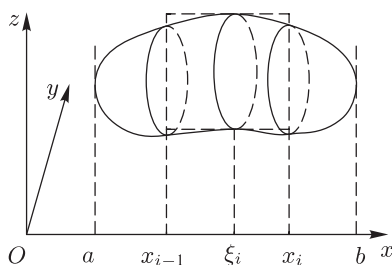


Рис. 12.16

оси Ox и проходящей через точку x интервала $[a, b]$. Будем считать, что эта площадь известна для любой точки x из $[a, b]$, функция $S(x)$ непрерывна в $[a, b]$. Нужно найти объем V по известной функции $S(x)$ в интервале $[a, b]$. Интервал $[a, b]$ разобьем на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Каждая последующая точка лежит правее предыдущей. Обозначим $x_0 = a$ и $x_n = b$. Через точки деле-

ния $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox , и тем самым разобьем данное тело на n частей. Рассмотрим часть, расположенную между плоскостями, проведенными через точки x_{i-1}, x_i . В интервале $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i , $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси Ox , и получим сечение, площадь которого равна $S(\xi_i)$. Через границу этого сечения проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox , расположенную между плоскостями, проведенными через точки x_{i-1}, x_i . Получим цилиндр, высота которого равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Его основания, площади которых равны $S(\xi_i)$, лежат на плоскостях, проходящих через точки x_{i-1}, x_i . Объем этого цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т.е. $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$. Этим цилиндром заменим часть тела, расположенную между плоскостями, проведенными через точки x_{i-1}, x_i . Выполним такое же построение для всех частей, на которые разбили тело, получим ступенчатое тело, состоящее из n цилиндров, его объем V_n равен сумме объемов цилиндров: $V_n = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$. Число n устремим к бес-

конечности так, чтобы длина наибольшего интервала $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Тогда ступенчатое тело будет приближаться к заданному, поэтому естественно за объем последнего принять $V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} V_n$.

Подставив выражение для V_n , получим $V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$.

В правой части под знаком предела стоит интегральная сумма для непрерывной функции $S(x)$ и интервала $[a, b]$, в котором эта функция задана. Следовательно, предел указанной интегральной суммы равен определенному интегралу от функции $S(x)$, взятому по интервалу $[a, b]$:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (12.40)$$

Объем тела вращения. Пусть в плоскости Oxy кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, a, b — абсциссы точек A и B соответственно. Будем считать, что $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$ и всюду $f(x) > 0$. При вращении этой кривой вокруг оси абсцисс получим поверхность, ограничивающую тело вращения (рис. 12.17). Требуется найти его объем. Через точку x интервала $[a, b]$ проведем плоскость, перпендикулярную к оси Ox . Эта плоскость пересекает тело по кругу (он показан на рис. 12.17), радиус которого равен ординате $f(x)$ точки кривой AB с абсциссой x . Ясно, что площадь этого круга равна $S(x) = \pi[f(x)]^2$. Таким образом, для каждого x из интервала $[a, b]$ известна площадь сечения $S(x)$, поэтому для нахождения искомого

объема можем воспользоваться формулой (12.40): $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

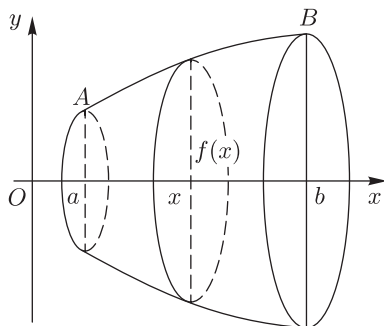


Рис. 12.17

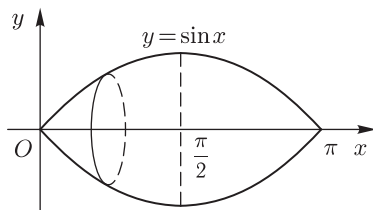


Рис. 12.18

Пример. Вычислим объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси Ox кривой с уравнением $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ (рис. 12.18). Итак, $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. При вычислении нужно учесть, что $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Имеем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x \, d(2x) \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

§ 12.11. Приближенное вычисление определенного интеграла методом трапеций

Если известна первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, то интеграл $\int_a^b f(x) \, dx$ вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Но $F(x)$ не всегда можно представить через элементарные функции, и в этих случаях определенный интеграл вычисляют приближенно. Рассмотрим лишь один из таких приближенных методов — метод трапеций.

Итак, нужно приближенно вычислить интеграл $\int_a^b f(x) \, dx$, где a и b — заданные числа, $a < b$, а $f(x)$ — заданная в интервале $[a, b]$ непрерывная функция. Для простоты предположим, что кривая AB с уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, лежит выше оси Ox , a, b — абсциссы точек A, B (рис. 12.19). Известно, что в рассматриваемом случае искомый интеграл равен площади S_{aABb} криволинейной трапеции, основание которой — отрезок ab оси Ox , а сверху она ограничена кривой

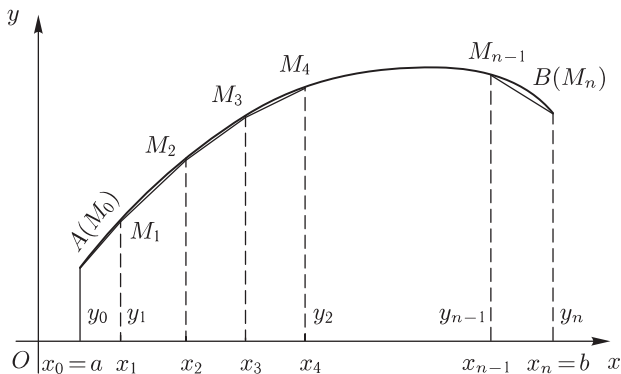


Рис. 12.19

AB с уравнением $y = f(x)$. Разделим интервал $[a, b]$ на n равных частей длины $\Delta x = (b - a)/n$, число n зададим по нашему усмотрению. Обозначим $a = x_0$, $b = x_n$. Определим точки деления $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, ..., $x_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x$, $x_n = b$. Вычислим в них значения подынтегральной функции, которые обозначим $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ..., $f(x_{n-1}) = y_{n-1}$, $f(x_n) = y_n$. Эти числа представляют собой ординаты точек кривой AB абсциссы которых суть соответственно $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. Обозначим точки

$M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $M_n(x_n, y_n)$.

Каждые две соседние из них соединим хордой. Получим фигуру, состоящую из n трапеций, высоты которых одинаковы и равны Δx . Длины оснований трапеций равны $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$. Площадь фигуры S_n , состоящей из этих n трапеций, равна сумме площадей трапеций:

$$S_n = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Ясно, что найденную площадь S_n приближенно можно взять в качестве площади криволинейной трапеции S_{aABb} ; следовательно, можно принять ее приближенно равной искомому интегралу. В итоге получим формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad \Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Она называется *формулой трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла*. Чем больше число делений n , тем формула точнее. Предлагаем самостоятельно, используя ее, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin x dx, \text{ взяв } n = 6.$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 13.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна всюду в интервале $[a, \infty)$ и η — произвольная точка этого интервала. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, \eta]$, следовательно, согласно теореме 12.1 существует определенный интеграл $\int_a^\eta f(x) dx$. Предел этого интеграла, когда $\eta \rightarrow +\infty$, называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ с верхним бесконечным пределом и обозначается $\int_a^\infty f(x) dx$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^\eta f(x) dx. \quad (13.1)$$

Если в последней формуле предел правой части существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл левой части *сходится*. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Совершенно аналогично определяется несобственный интеграл с нижним бесконечным пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_\xi^b f(x) dx.$$

Вполне понятно, что эта формула справедлива, когда функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty, b]$. Таким же способом вводится понятие несобственного интеграла с двумя бесконечными

пределами: пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в любой конечной части интервала $(-\infty + \infty)$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^c f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_c^{\eta} f(x) dx,$$

где c — произвольное число.

Пример. Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

По формуле (13.1) имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\eta} + 1 \right] = 1.$$

Итак, предел правой части существует и равен 1, следовательно, рассматриваемый несобственный интеграл сходится и равен 1.

§ 13.2. Несобственные интегралы от разрывных функций

Отметим вначале, что если функция $f(x)$ внутри интервала $[a, b]$ имеет конечное число точек разрыва первого рода, то под интегралом $\int_a^b f(x) dx$ будем понимать сумму интегралов, взятых по всем интервалам непрерывности функции $f(x)$. Например, если $x = c$, $a < c < b$, — единственная точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b)$ и в точке b имеет разрыв, причем $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$. Пусть ε — малая положительная величина и $a < b - \varepsilon$ (рис. 13.1). Тогда функция непрерывна

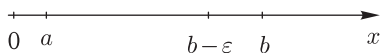


Рис. 13.1

в интервале $[a, b - \varepsilon]$, поэтому существует определенный интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Он изменяется, когда изменяется ε . Предел этого интеграла

при $\varepsilon \rightarrow 0$ называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$ и обозначается как обычный определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Если предел правой части существует

и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет разрыв в точке a и непрерывна в интервале $(a, b]$. Тогда по аналогии введем понятие несобственного интеграла для этого случая:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке c интервала $[a, b]$, $a < c < b$, и непрерывна в интервалах $[a, c)$, $(c, b]$. В этом случае понятие несобственного интеграла вводим так (рис. 13.2):

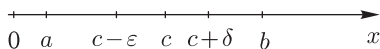


Рис. 13.2

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0, \delta > 0}} \int_{c+\delta}^b f(x) dx. \quad (13.2)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Подынтегральная функция

$1/x^2$ терпит разрыв в точке $x = 0$. При $x \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности, поэтому по формуле (13.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right) + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{\delta}^1 \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Замечание. Если бы мы упустили из виду, что рассматриваемый интеграл является несобственным из-за того, что подынтегральная функция обращается в бесконечность в точке $x = 0$ интервала интегри-

рования $[-1, 1]$, и формально применили бы для вычисления интеграла формулу Ньютона–Лейбница, пригодную только для непрерывных функций, то получили бы неверный результат.

§ 13.3. Объем цилиндрического тела

Пусть на плоскости Oxy , в области D , задана функция двух переменных $z = f(x, y)$, непрерывная и положительная всюду в D . В пространстве $Oxyz$ уравнение $z = f(x, y)$ определяет поверхность. Так как $f(x, y) > 0$ в области D , то указанная поверхность расположена выше плоскости Oxy (рис. 13.3).

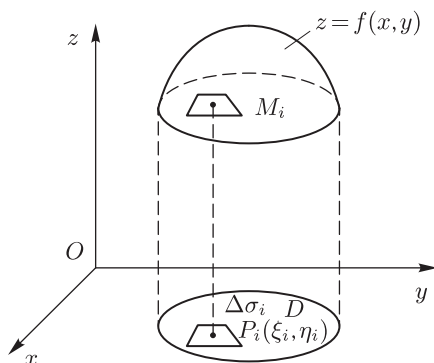


Рис. 13.3

Требуется найти объем цилиндрического тела, основанием которого является область D ; сверху оно ограничено поверхностью с уравнением $z = f(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz и проходящими через границу области D .

Разобъем область D на n частей, которые будем называть частичными областями. Эти области, а также их площади обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_i, \dots, \Delta\sigma_n$. Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Тем самым рассматриваемое цилиндрическое тело разобьем на n частей — цилиндрических тел. Внутри частичной области $\Delta\sigma_i$ возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. В этой точке вычислим значение заданной функции $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i)$. Это значение равно P_iM_i — расстоянию от точки P_i до точки M_i поверхности $z = f(x, y)$. Точка P_i — проекция точки M_i на плоскость Oxy при проецировании параллельно оси Oz . Через точку M_i проведем плоскость параллельно плоскости Oxy . На этой плоскости цилиндрическая поверхность, проведенная через границу области $\Delta\sigma_i$ с образующими, параллельными

оси Oz , отсечет фигуру с площадью $\Delta\sigma_i$ (рис. 13.3). Таким образом получится цилиндр с площадью основания $\Delta\sigma_i$, высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ и, следовательно, объемом, равным $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. Этим цилиндром заменим i -ю часть цилиндрического тела с площадью основания $\Delta\sigma_i$. Такое же построение выполним для всех частей области D , на которые мы ее разбили. Тогда получим ступенчатое тело, состоящее из n цилиндров. Объем этого тела обозначим V_n . Он равен сумме объемов цилиндров, из которых тело состоит:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \quad (13.3)$$

Диаметром частичной области называется наибольшее расстояние между точками границы этой области. Например, для прямоугольника диаметром является длина диагонали, а для прямоугольного треугольника — это длина гипотенузы.

Обозначим через d_i диаметр i -частичной области $\Delta\sigma_i$. Пусть $\max d_i$ есть наибольший из всех диаметров частичных областей области D . Пусть число делений $n \rightarrow \infty$ так, что $\max d_i \rightarrow 0$, т.е. все частичные области стягиваются в точки. Тогда вышеуказанное ступенчатое тело по форме будет приближаться к исходному цилиндрическому, поэтому естественно за объем V цилиндрического тела принять

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} V_n = V.$$

Подставим сюда сумму из формулы (13.3) и получим

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \quad (13.4)$$

§ 13.4. Двойной интеграл и его геометрический смысл

Пусть в области D задана функция $f(x, y) = f(P)$, где $P(x, y)$ — любая точка области. Будем считать, что эта функция принимает любые значения. Область D разобьем на n частичных областей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Внутри области $\Delta\sigma_i$ возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим в ней значение заданной функции, т.е. найдем $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i)$. Это значение умножим на площадь $\Delta\sigma_i$. Подобные вычисления проведем для всех частей, на которые разбили область D . Просуммируем все произведения, получим $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. Эта сумма называется *интегральной суммой*

для функции $f(x, y)$ и области D , в которой функция задана. Пусть, как и раньше, $\max d_i$ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Пусть число частей $n \rightarrow \infty$ так, что $\max d_i \rightarrow 0$, т. е. все частичные области стягиваются в точки. Тогда если существует конечный предел вышеуказанной интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения области D , ни от выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$, то его называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y) = f(P)$ по области D и обозначают

$$\iint_D f(P) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Итак,

$$\iint_D f(P) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \quad (13.5)$$

Здесь D — область интегрирования, элемент площади $d\sigma = dx dy$ в связи с тем, что область интегрирования расположена на плоскости Oxy ; $f(P) d\sigma$ — подынтегральное выражение; x, y — переменные интегрирования.

Отметим частный случай формулы (13.5), когда $f(x, y) = 1$ всюду в области D , тогда сумма под знаком предела в правой части формулы (13.5) будет равна сумме площадей всех частичных областей, т. е. площади S области D . Предел этой площади тоже равен S , так как предел постоянной равен ей самой. Итак, интеграл $\iint_D dx dy$ равен площади S области интегрирования D .

Если всюду в области D функция $f(x, y) = f(P) > 0$, то согласно (13.4) предел правой части (13.5) равен объему V соответствующего цилиндрического тела. Итак, объем цилиндрического тела, основанием которого служит область D и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — положительная функция, заданная в D , определяется формулой

$$V = \iint_D f(P) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (13.6)$$

В этом заключается *геометрический смысл двойного интеграла*.

§ 13.5. Тройной интеграл и его физический смысл.

Теорема существования кратных интегралов

Пусть в области V с границей S в пространстве $Oxyz$ задана функция $f(x, y, z) = f(P)$, где $P(x, y, z)$ — любая точка области V (рис. 13.4). Разобьем область V на n частей, объемы которых и сами

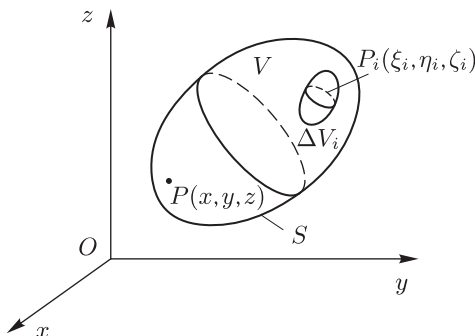


Рис. 13.4

области обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Внутри области ΔV_i возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и вычислим в ней значение заданной функции, т.е. найдем $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = f(P_i)$. Это значение умножим на ΔV_i . Прделавав подобную операцию со всеми частями, на которые разбили область V , и сложив все произведения, получим интегральную сумму для заданной функции $f(x, y, z) = f(P)$ и области V ее задания: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$. Пусть, как и раньше, d_i — диаметр области ΔV_i , т.е. наибольшее расстояние между точками границы области, а $\max d_i$ — наибольший из всех диаметров частичных областей области V .

Если существует конечный предел вышеуказанной интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$, $\max d_i \rightarrow 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V , ни от выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то этот предел называют *тройным интегралом* по области V от функции $f(x, y, z) = f(P)$ и обозначают $\iiint_V f(P) dV$. Итак,

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (13.7)$$

Здесь dV называется элементом объема, а остальные термины называют так же, как и в случае двойного интеграла. Поскольку область интегрирования расположена в системе $Oxyz$, то $dV = dx dy dz$.

Отметим частный случай. Когда $f(x, y, z) \equiv 1$ всюду в области V , формула (13.7) дает

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz = V,$$

т.е. объем области интегрирования V . В самом деле, в этом случае правая часть формулы (13.7) под знаком предела содержит сумму всех объемов частичных областей. Ясно, что эта сумма будет равна объему области, и предел этого объема тоже будет равен V .

Рассмотрим *физический смысл тройного интеграла*. Пусть область V сплошь заполнена веществом и Δm_i — масса вещества, заключенного в i -й частичной области, содержащей внутри себя точку P_i . Тогда предел $\lim (\Delta m_i / \Delta V_i)$, когда $\Delta V_i \rightarrow 0$ и стягивается в точку P_i , называется *плотностью вещества в точке P_i* .

Пусть вещество внутри области V распределено неравномерно: в каждой точке $P(x, y, z)$ плотность равна $\gamma(x, y, z)$, где функция $\gamma(x, y, z)$, характеризующая распределение плотности по телу, известна всюду в области V . Требуется найти M — массу вещества, заключенного в области V (массу тела V).

Область V разобьем на n частей с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Внутри области ΔV_i (рис. 13.4) возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и найдем в ней значение заданной плотности, т.е. значение $\gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. В силу малости частичной области ΔV_i можно приближенно считать, что внутри ΔV_i плотность остается постоянной и равной $\gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Умножив эту плотность на объем ΔV_i , найдем приближенно массу Δm_i вещества внутри ΔV_i . Это сделаем со всеми частями, на которые разбили область V . Сложив, приближенно найдем искомую массу M : $M \approx \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$. Ясно, что для нахождения точного значения M здесь в правой части нужно взять предел, когда $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$. Итак,

$$M = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

Но согласно формуле (13.7) предел правой части последней формулы равен тройному интегралу по области V от функции $\gamma(x, y, z)$. Таким образом, масса определяется формулой

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Теорема 13.1 (о существовании двойного (тройного) интеграла). *Если функция непрерывна всюду в области, включая границу, то существует конечный предел интегральной суммы для этой функции и области, в которой она задана, когда число делений $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$. При этом предел не зависит ни от способа разбиения области, ни от выбора точек P_i .*

Доказательство теоремы опускается.

§ 13.6. Свойства двойного (тройного) интеграла

Ниже приводятся свойства для двойных интегралов, для тройных интегралов они аналогичны.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла, т. е. если $A = \text{const}$, то

$$\iint_D Af(x, y) d\sigma = A \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

2. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций. Например, для двух функций

$$\iint_D [f(x, y) + \varphi(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma + \iint_D \varphi(x, y) d\sigma.$$

3. Если $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$ всюду в области D , то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma.$$

4. Если m, M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D , то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS,$$

где S — площадь области D .

5. Если $f(x, y)$ непрерывна всюду в области D и на ее границе, то в области D найдется по крайней мере одна точка $M(\xi, \eta)$, для которой справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)S.$$

6. Если область D разбита на две части D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

Эти свойства доказываются так же, как соответствующие свойства определенного интеграла, с учетом определения двойного интеграла.

Для тройного интеграла свойства формулируются так же, только в свойствах 4 и 5 площадь S области D нужно заменить на объем области V .

§ 13.7. Вычисление двойного интеграла

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $f(x, y)$ которая принимает положительные значения всюду в области D (рис. 13.5).

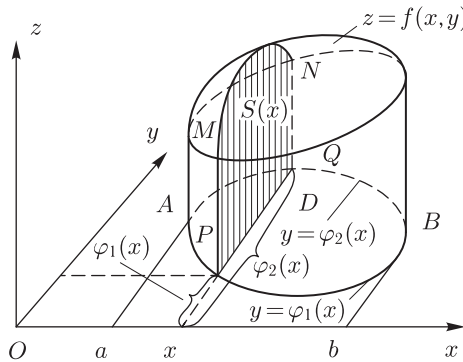


Рис. 13.5

Тогда двойной интеграл от этой функции по области D , как мы знаем, равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D , а сверху — поверхностью с уравнением $z = f(x, y)$:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = V. \quad (13.8)$$

Пусть область D лежит между прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными оси Oy и имеющими общие точки с границей области D (это означает, что цилиндрическое тело лежит между плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки a, b оси Ox). Кривые APB , AQB — части границы области D , заданные соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Здесь A, B — точки границы области D с абсциссами a, b соответственно.

Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ однозначны. Это означает, что любая прямая, параллельная Oy и проходящая через точку x интервала $[a, b]$, пересекает линию APB , а также линию AQB только в одной точке, причем $\varphi_1(x)$ — ордината точки P входа этой прямой в область D , $\varphi_2(x)$ — ордината точки Q выхода этой прямой из области D . Ясно, что по этой прямой плоскость Oxy пересекается с поверхностью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x . Эта последняя плоскость пересекает рассматриваемое цилиндрическое тело по фигуре $PMNQ$, представляющей собой криволинейную трапецию с основанием PQ . Сверху трапеция ограничена кривой MN . Все точки указанной плоскости, а следовательно, и кривой MN , имеют

одну и ту же абсциссу x . Но так как кривая MN лежит на поверхности $z = f(x, y)$, то координаты точек этой кривой удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$ поверхности. У всех точек кривой MN абсцисса не изменяется, а ордината y изменяется от значения $\varphi_1(x)$ — ординаты точки P — до значения $\varphi_2(x)$ — ординаты точки Q .

Итак, кривая MN , ограничивающая сверху криволинейную трапецию $PMNQ$, имеет уравнение $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$. Теперь площадь S этой трапеции $PMNQ$ можем вычислить с помощью определенного интеграла, а именно,

$$S = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad x = \text{const}.$$

Ясно, что для различных фиксированных x из интервала $[a, b]$ эта площадь будет различной, так как будут различаться соответствующие криволинейные трапеции, т. е. эта площадь есть функция от x . Обозначим ее $S(x)$. Таким образом,

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (13.9)$$

где $a \leq x \leq b$.

Итак, для каждого x из $[a, b]$ известна площадь $S(x)$ сечения цилиндрического тела плоскостью, проходящей через точку x перпендикулярно к оси Ox . Мы знаем, что объем V рассматриваемого цилиндрического тела выражается с помощью определенного интеграла, взятого от a до b для функции $S(x)$, т. е. $V = \int_a^b S(x) dx$. Вместо $S(x)$ подставим сюда выражение (13.9) и получим

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Но, с другой стороны, найденный объем V согласно (13.8) равен двойному интегралу, поэтому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Выражение в правой части называется *двукратным интегралом*. Последнюю формулу можно записать в более простой форме

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (13.10)$$

Таким образом, (13.10) — формула вычисления двойного интеграла. Здесь в правой части внутренний интеграл берется по y при фиксированном x .

Формула (13.10) справедлива и тогда, когда граница области D имеет участки, лежащие на прямых $x = a$, $x = b$ (или на других прямых, параллельных оси Oy), т. е. когда область D имеет вид, показанный на рис. 13.6. Если при этом $\varphi_1(x) \equiv c = \text{const}$ и $\varphi_2(x) \equiv d = \text{const}$, то область D имеет форму прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям. В этом случае пределы внутреннего интеграла правой части (13.10) — пределы для y — также будут постоянными.

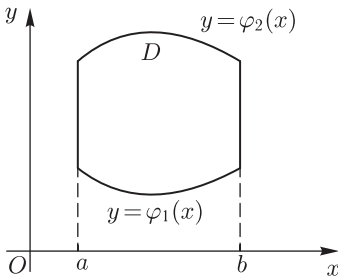


Рис. 13.6

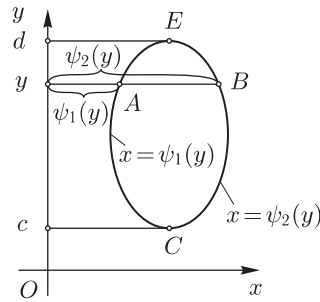


Рис. 13.7

Пусть теперь область D расположена между прямыми $y = c$, $y = d$ и участки ее границы CAE , CBE заданы соответственно уравнениями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, в которых $c \leq y \leq d$ (рис. 13.7). В этом случае, как и при выводе формулы (13.10), можно показать, что имеет место формула, аналогичная (13.10):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (13.11)$$

Здесь справа внутренний интеграл по x берется при фиксированном y .

Левые части формул (13.10) и (13.11) равны, следовательно, равны их правые части. Приравняв их, получим

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Это соотношение есть *формула перестановки интегралов* в двукратном интеграле.

Если область D имеет более общий вид, чем указано выше, и может быть разбита на части, для которых справедливы формулы (13.10) или (13.11), то двойной интеграл по исходной области будет равен сумме двойных интегралов по этим частям.

Пример. Вычислить $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, где D — конечная область,

лежащая между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$ (рис. 13.8). Эти кривые пересекаются в точках $O(0,0)$ и $B(1,1)$. Область D — заштрихованная область. Она расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 1$, следовательно, в нашем случае $a = 0$, $b = 1$. С одной стороны область ограничена кривой $y = x^2$, с другой — прямой $y = x$. Правые части этих уравнений суть пределы интегрирования для внутреннего интеграла формулы (13.10), т.е. $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$. При фиксированном x эти величины суть ординаты

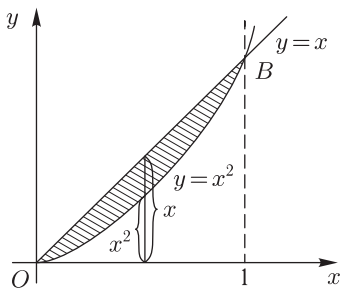


Рис. 13.8

соответственно точки входа и точки выхода из области D прямой, проходящей через точку x параллельно оси Oy . Итак, в рассматриваемом примере формула (13.10) дает

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y) dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл по y при $x = \text{const}$. Он является обычным определенным интегралом, поэтому вычислим его по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_{x^2}^x (x^2 + y) dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} = x^3 + \frac{x^2}{2} - \left(x^4 + \frac{x^4}{2} \right).$$

Тогда

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left(-\frac{3x^4}{2} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(-\frac{3x^5}{10} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{60}.$$

Предлагаем самостоятельно вычислить данный двойной интеграл, используя формулу (13.11).

§ 13.8. Замена переменных в двойном интеграле

В декартовой системе координат Oxy на плоскости дана область D , ограниченная кривой L , и $P(x, y)$ — некоторая точка этой области (рис. 13.9). Пусть $O'uv$ — другая декартова система координат, в ней

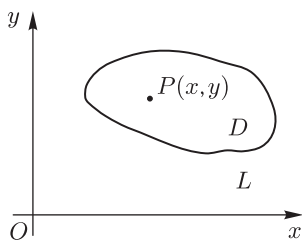


Рис. 13.9

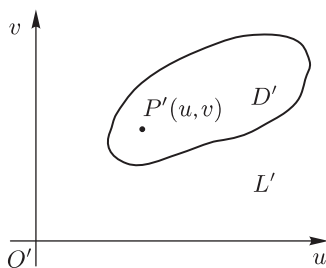


Рис. 13.10

D' — область, ограниченная кривой L' , и $P'(u, v)$ — некоторая точка области D' (рис. 13.10). Пусть заданы две функции

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (13.12)$$

которые будем считать непрерывными и имеющими непрерывные частные производные первого порядка как по u , так и по v всюду в области D' . Предположим, что функции (13.12) таковы, что каждой точке $P'(u, v)$ области D' они ставят в соответствие определенную точку $P(x, y)$ области D (зная координаты u, v точки P' , по формулам (13.12) можно найти координаты x, y соответствующей точки P области D). И наоборот, каждой точке $P(x, y)$ области D отвечает определенная точка P' с координатами u, v области D' (зная координаты x, y точки P , из соотношений (13.12) можно найти координаты u, v соответствующей точки P' области D'). В этом случае говорят, что формулы (13.12) устанавливают *взаимно однозначное соответствие* между точками области D с одной стороны и точками области D' с другой. Или еще говорят, что эти функции *отображают* область D' на область D . От функций (13.12) вычислим частные производные по u и v и образуем из найденных частных производных определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (13.13)$$

Он называется *определителем Якоби* для функций (13.12).

Без доказательства запишем формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \cdot |J| du dv. \quad (13.14)$$

Таким образом, при замене переменных по формулам (13.12) в двойном интеграле по области D мы должны переменные интегрирования x, y заменить соответственно на $\varphi(u, v), \psi(u, v)$, а элемент площади $dx dy$ — на $|J| du dv$ (при этом двойной интеграл в правой части берется по новой области D').

§ 13.9. Переход к полярным координатам в двойном интеграле

В качестве примера замены переменных в двойном интеграле рассмотрим переход к полярным координатам. Пусть в декартовой системе координат Oxy задана область D , ограниченная кривой L . В плоскости Oxy , кроме декартовой, введем полярную систему координат, поместив полюс в точку O и направив полярную ось по Ox в положительном направлении (рис. 13.11). Пусть x, y — декартовы координаты точки M области D , а θ и ρ — полярные координаты этой точки. Как видно из рис. 13.11,

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (13.15)$$

Пусть граница области D задана уравнениями в полярных координатах, а именно, участок APB кривой L задан уравнением $\rho = \varphi_1(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, а участок AQB кривой L — уравнением $\rho = \varphi_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Отметим, что уравнение $\theta = \alpha$ определяет ось OA , а уравнение $\theta = \beta$ — соответственно ось OB . Отметим также, что при фиксированном θ значения $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ суть расстояния OP и OQ соответственно. Введем еще одну декартову систему $O'\theta\rho$. В этой системе θ, ρ уже декартовы координаты точки плоскости $O'\theta\rho$, в то время как в плоскости Oxy они являются полярными координатами соответствующей точки. По формулам (13.13) каждой точке области D будет отвечать точка области D' в плоскости $O'\theta\rho$, и тем самым в этой плоскости получим область D' с границей L' , в которую (согласно формулам (13.15)) переходит область D плоскости Oxy (рис. 13.12). Уравнения $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ в плоскости $O'\theta\rho$ определяют прямые, па-

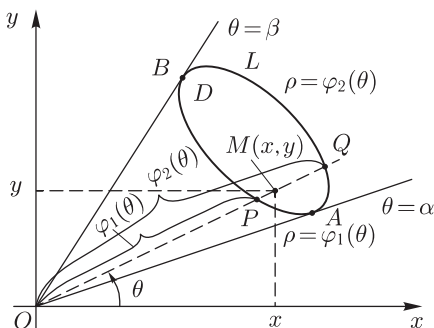


Рис. 13.11

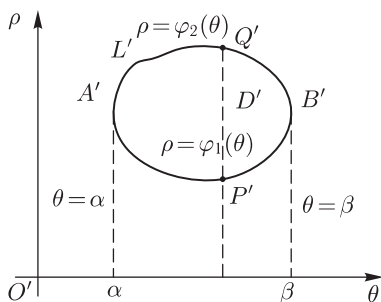


Рис. 13.12

параллельные оси $O'\rho$. Между этими прямыми расположена область D' . Ясно, что участку APB кривой L с уравнением $\rho = \varphi_1(\theta)$ отвечает участок $A'P'B'$ кривой L' с тем же уравнением $\rho = \varphi_1(\theta)$, так как полярные координаты точки кривой L являются декартовыми координатами соответствующей точки кривой L' . Линии AQB отвечает часть $A'Q'B'$ кривой L' с уравнением $\rho = \varphi_2(\theta)$. Для функций (13.15) вычислим определитель Якоби (13.13), положив в нем $u = \theta$, $v = \rho$:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho.$$

Таким образом, $|J| = \rho$.

Запишем формулу (13.14) для нашего случая (когда вместо функций (13.12) берутся функции (13.15)):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\theta d\rho. \quad (13.16)$$

Это есть *формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле*, здесь D' — область в декартовой системе $O'\theta\rho$. Теперь двойной интеграл по этой области D' выразим через двукратный, используя формулу (13.10). Получим

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho. \quad (13.17)$$

Формула (13.17) справедлива и тогда, когда граница L области D имеет участки, лежащие на прямых $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, т. е. когда область D имеет вид, представленный на рис. 13.13. Если при этом $\varphi_1(\theta) \equiv 0$,

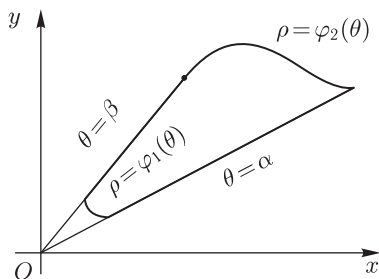


Рис. 13.13

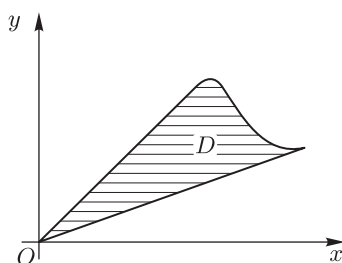


Рис. 13.14

то область D принимает вид сектора (рис. 13.14). Для этого сектора в формуле (13.17) нужно взять $\varphi_1(\theta) \equiv 0$.

Пусть в последнем случае $\alpha = 0$, а $\beta = 2\pi$, при этом область D имеет вид, изображенный на рис. 13.15. Для этой области в формуле (13.15) нужно взять $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\varphi_1(\theta) \equiv 0$.

Пусть в последнем случае $\varphi_2(\theta) = R \equiv \text{const}$, тогда область D имеет форму круга с центром в начале координат и радиусом $r = R$ (рис. 13.16). Из сказанного выше ясно, что для этого круга в формуле (13.17) мы должны взять $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\varphi_1(\theta) = 0$, $\varphi_2(\theta) = R$. Поэтому на практике при вычислении двойного интеграла по области в виде круга лучше перейти к полярным координатам указанным выше способом.

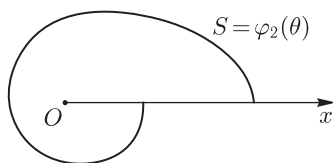


Рис. 13.15

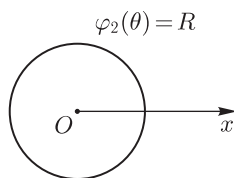


Рис. 13.16

Отметим, что пределы двукратного интеграла формулы (13.17) устанавливаются непосредственно по уравнениям частей границы L области D в полярных координатах.

§ 13.10. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$. Будем считать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по x и по y в области D . Для определенности предположим, что $f(x, y) > 0$ в D . При этом в пространстве $Oxyz$ функ-

ции $z = f(x, y)$ отвечает поверхность, расположенная выше плоскости Oxy (рис. 13.17). Требуется вычислить площадь S этой поверхности.

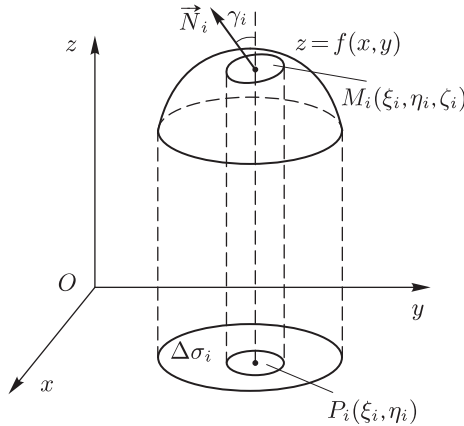


Рис. 13.17

Разобьем область D на n частей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Внутри i -й части возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. В этой точке вычислим значение заданной функции $z = f(x, y)$ и найдем число $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Это число — аппликата некоторой точки M_i поверхности $z = f(x, y)$. Очевидно, абсциссы и ординаты точек M_i и P_i совпадают. В точке M_i проведем касательную плоскость к поверхности $z = f(x, y)$, а через границу области $\Delta\sigma_i$ — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Эта поверхность отсечет на только что проведенной касательной плоскости фигуру, площадь которой обозначим ΔS_i . Это построение выполним для всех частей, на которые мы разбили область D , и получим фигуру, состоящую из n кусков касательных плоскостей, проведенных к поверхности $z = f(x, y)$ в точках $M_1, M_2, \dots, M_n$. Площадь этой фигуры равна сумме площадей, из которых она состоит, т. е. $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Пусть $\max d_i$ — наибольший из всех диаметров частичных областей $\Delta\sigma_i$. Число n устремим к бесконечности так, чтобы $\max d_i \rightarrow 0$. Тогда все $\Delta\sigma_i$ стягиваются в точки, и фигура, состоящая из кусков касательных плоскостей, приближается к заданной поверхности. Поэтому за площадь поверхности S естественно принять предел площади указанной фигуры (состоящей из кусков касательных плоскостей):

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta S_i. \quad (13.18)$$

Пусть $\vec{N}_i$ есть вектор, направленный по нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_i , а γ_i — острый угол, образованный этим вектором с осью Oz . Ясно, что этот угол равен двугранному углу между касательной плоскостью к рассматриваемой поверхности в точке M_i и плоскостью Oxy . Поскольку $\Delta\sigma_i$ — проекция на плоскость Oxy фигуры с площадью ΔS_i , лежащей на указанной касательной плоскости, то

$$\Delta\sigma_i = \Delta S_i \cos \gamma_i. \quad (13.19)$$

Формула (13.19) очевидна, если ΔS_i имеет форму прямоугольника, сторона которого параллельна линии пересечения касательной плоскости в точке M_i к поверхности и плоскости Oxy (сделайте чертеж и убедитесь в этом!). Справедливость (13.19) в общем случае следует из того, что любую фигуру ΔS_i можно рассматривать как предел вписанной в нее фигуры, состоящей из прямоугольников вышеуказанного вида.

Запишем уравнение поверхности, перенеся $f(x, y)$ влево: $z - f(x, y) = 0$. Левую часть обозначим через $F(x, y, z)$, тогда уравнение поверхности запишется так: $F(x, y, z) = 0$. Найдем от функции $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ частные производные: $\partial F / \partial x = -f'_x(x, y)$, $\partial F / \partial y = -f'_y(x, y)$, $\partial F / \partial z = 1$. Вычислим эти производные в точке M_i поверхности:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_i} = -f'_x(\xi_i, \eta_i), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_i} = -f'_y(\xi_i, \eta_i), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_i} = 1.$$

Как следует из результатов § 9.17, эти производные, вычисленные в точке M_i , равны проекциям на оси координат вектора $\vec{N}_i$, направленного по нормали к поверхности в точке M_i : $\vec{N}_i = (-f'_x(\xi_i, \eta_i), -f'_y(\xi_i, \eta_i), 1)$. Можно считать, что проекции этого вектора вычислены в точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$, так как сюда входят только координаты этой точки. Длина этого вектора равна

$$|\vec{N}_i| = \sqrt{f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i) + 1}. \quad (13.20)$$

Из формулы (13.19) имеем

$$\Delta S_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos \gamma_i}. \quad (13.21)$$

Учтем, что проекция вектора $\vec{N}_i$ на ось z равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью. С другой стороны, эта проекция равна 1; значит, $1 = |\vec{N}_i| \cos \gamma_i$, следовательно, $\cos \gamma_i = 1 / |\vec{N}_i|$. Последнее выражение подставим в формулу (13.21)

и получим $\Delta S_i = |\vec{N}_i| \cdot \Delta \sigma_i$. Это произведение подставим в правую часть (13.18) и учтем, что $|\vec{N}_i|$ определяется формулой (13.20). Тогда

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i) + 1} \cdot \Delta \sigma_i. \quad (13.22)$$

Рассмотрим непрерывную в области D функцию

$$\sqrt{f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y) + 1}.$$

В правой части (13.22) под знаком предела стоит интегральная сумма этой функции в области D , поэтому предел в (13.22) равен двойному интегралу по области D от рассматриваемой функции. Итак,

$$S = \iint_D \sqrt{f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y) + 1} \, d\sigma, \quad d\sigma = dx \, dy. \quad (13.23)$$

Эта формула позволяет вычислить площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

Пример. Требуется вычислить площадь $S/2$ верхней половины сферы с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Для точек верхней половины сферы имеем $z = f(x, y)$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Здесь область D — круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Найдем частные производные:

$$f'_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Эти производные подставим в формулу (13.23), в которой вместо S мы должны взять $S/2$. Тогда будем иметь

$$S/2 = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам согласно (13.16) и получим

$$S/2 = \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\theta \, d\rho.$$

Последний интеграл выразим через двукратный с учетом сказанного в конце § 13.9:

$$\begin{aligned} S/2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{(-1/2) d(1 - \rho^2)}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\sqrt{1 - \rho^2} \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

§ 13.11. Вычисление объемов с помощью двойных интегралов

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$, которая всюду в D принимает положительные значения. Тогда поверхность, которую определяет это уравнение, расположена выше плоскости Oxy (как показано на рис. 13.18). Мы знаем, что в этом случае согласно (13.6) интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$ равен объему V цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D , а сверху — поверхностью $z = f(x, y)$.

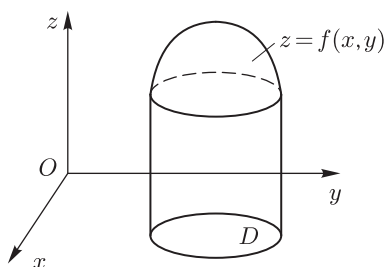


Рис. 13.18

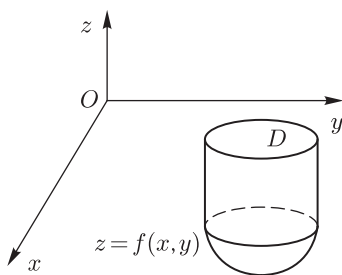


Рис. 13.19

Пусть теперь всюду в области D функция $z = f(x, y)$ принимает отрицательные значения, тогда цилиндрическое тело вместе с поверхностью лежит ниже плоскости Oxy (рис. 13.19). Поступая, как и раньше (§ 13.3), нетрудно показать, что в этом случае $\iint_D f(x, y) d\sigma = -V$,

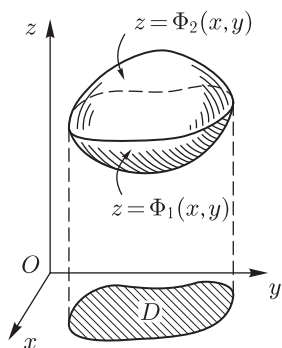


Рис. 13.20

где V — объем указанного цилиндрического тела. Эти формулы используются для нахождения объемов с помощью двойных интегралов. Пусть, например, надо найти объем V тела, показанного на рис. 13.20, для которого D является проекцией на плоскость Oxy при проецировании параллельно оси Oz . Данное тело ограничено сверху поверхностью $z = \Phi_2(x, y)$ и снизу поверхностью $z = \Phi_1(x, y)$. Согласно (13.6) интеграл

$$\iint_D \Phi_2(x, y) d\sigma = V_2 \quad (13.24)$$

равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D , а сверху поверхностью $z = \Phi_2(x, y)$. Далее, интеграл

$$\iint_D \Phi_1(x, y) d\sigma = V_1 \quad (13.25)$$

равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D , а сверху поверхностью $z = \Phi_1(x, y)$. Ясно, что искомый объем будет равен $V = V_2 - V_1$. Подставим сюда вместо V_2 и V_1 выражения (13.24) и (13.25) и учтем, что разность двойных интегралов равна интегралу от разности:

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)] d\sigma, \quad d\sigma = dx dy.$$

§ 13.12. Вычисление тройного интеграла

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана конечная область V , в которой определена функция $f(x, y, z)$, непрерывная в области V , включая ее границу. Объем этой области также будем обозначать через V . Пусть D — проекция области V на плоскость Oxy (при проецировании параллельно оси Oz). Чтобы осуществить это проецирование, проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz , которая касается границы S области V по линии, разделяющей границу S области V на две части: верхнюю и нижнюю. Пусть верхняя часть определяется уравнением $z = \Phi_2(x, y)$, а нижняя — уравнением $z = \Phi_1(x, y)$. Функции Φ_1 и Φ_2 считаем однозначными всюду в области D . Геометрически это означает, что прямая, проходящая через любую точку $K(x, y)$ области D параллельно оси Oz , пересекает как нижнюю, так и верхнюю части поверхности S в одной точке.

Пусть M_1 — точка входа указанной прямой, M_2 — точка выхода этой прямой из области V (рис. 13.21). Все точки отрезка M_1M_2 , лежащего в области V , имеют одни и те же абсциссу x и ординату y , а аппликата z изменяется от значения $\Phi_1(x, y)$ (для M_1) до значения $\Phi_2(x, y)$ (для M_2). Следовательно, на этом отрезке функция $f(x, y, z)$ зависит только от z , т.е. является функцией одной переменной z . От этой функции с аргументом z возьмем интеграл по z в указанных

пределах: $\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$. Ясно, что интеграл, который мы вычис-

лили для точки $K(x, y)$ области D , будет зависеть от координат точки K . Это — функция, которая определена во всех точках области D ,

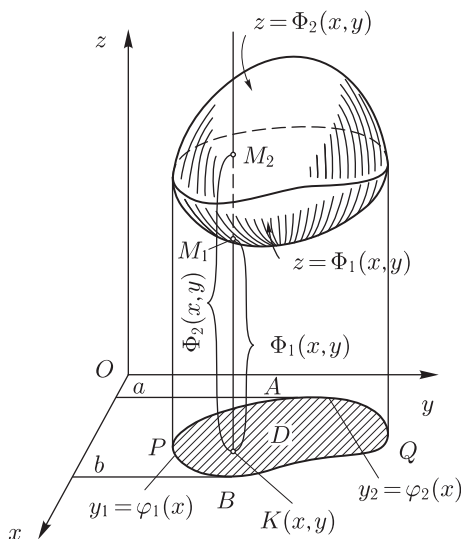


Рис. 13.21

поэтому от нее можно взять двойной интеграл по области D , т. е. вычислить

$$\iint_D d\sigma \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right).$$

Можно показать, что полученное здесь число будет равно тройному интегралу по области V от функции $f(x, y, z)$, т. е.

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) d\sigma, \quad (13.26)$$

$$dV = dx dy dz, \quad d\sigma = dx dy.$$

Следует помнить, что здесь в правой части интеграл по z берется при постоянных x и y .

Пусть теперь область D расположена между прямыми $x = a$, $x = b$, которые имеют общие точки с границей области D , причем части APB и AQB границы области D заданы соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда двойной интеграл правой части формулы (13.26), как мы знаем (см. (13.10)), можно выразить через двукратный, и получим

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (13.27)$$

Формулы (13.26), (13.27) справедливы и тогда, когда граница области V имеет части, лежащие на цилиндрической поверхности, проецирующей область V на область D , т. е. когда область V имеет вид, показанный на рис. 13.22. Если в последнем случае $\Phi_1(x, y) = l = \text{const}$

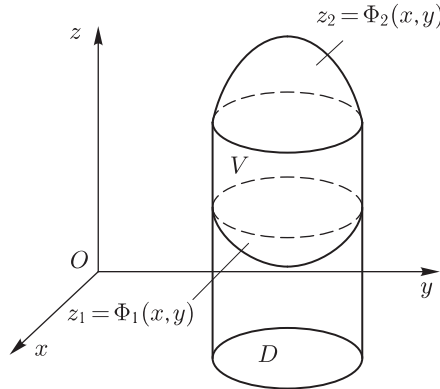


Рис. 13.22

и $\Phi_2(x, y) = k = \text{const}$, $l < k$, то область V сверху и снизу будет ограничена частями плоскостей, параллельных плоскости Oxy . В формулах (13.26), (13.27) пределы для z в этом случае будут постоянными. Если при этом дополнительно область D имеет форму прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то в (13.27) пределы для y тоже будут постоянными, а область V при этом имеет форму параллелепипеда.

Формулу (13.26) можно обосновать, например, следующим образом.

Будем считать, что функции $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ непрерывны в области D , включая ее границу.

Вначале отметим, что для правой части формулы (13.26) справедливо свойство, аналогичное свойству 5 тройного интеграла и называемое теоремой о среднем значении, т. е.

$$\iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = f(M) \cdot V,$$

где $f(M) = f(\xi, \eta, \zeta)$ — значение функции в некоторой точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ области V .

Это свойство обосновывается совершенно аналогично доказательству соответствующего свойства определенного интеграла. При этом надо учесть, что

$$\iint_D (\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)) dx dy = V$$

есть объем области V , положить

$$\frac{1}{V} \iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \mu$$

и принять во внимание теорему 9.1, замечая, что число μ заключено между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x, y, z)$ в области V , поэтому $\mu = f(M)$.

Область V разобьем на частичные области и интеграл правой части формулы (13.26) запишем в виде суммы соответствующих интегралов следующим образом.

Область D разобьем на n_* частей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_{n_*}$, тогда в силу соответствующего свойства двойных интегралов

$$\iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \sum_{j=1}^{n_*} \iint_{\Delta\sigma_j} dx dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Здесь в правой части каждый суммируемый интеграл определяется для части V_j области V , для которой фигура $\Delta\sigma_j$ является проекцией на плоскость Oxy , $j = 1, 2, \dots, n_*$, т. е. область V разбивается на n_* частей цилиндрическими поверхностями, проходящими через границы соответствующих частей $\Delta\sigma_j$ области D , с образующими параллельными оси Oz .

Пусть m_j — наименьшее значение функции $\Phi_2(x, y)$ в области $\Delta\sigma_j$, M_j — наибольшее значение функции $\Phi_1(x, y)$ в области $\Delta\sigma_j$, причем $m_j > M_j$ (последнее неравенство выполняется, если достаточно мал диаметр области $\Delta\sigma_j$, так как мы предполагаем, что во всех внутренних точках области D выполняется неравенство $\Phi_2(x, y) > \Phi_1(x, y)$). Интервал $M_j < z < m_j$ разобьем на k_j частей точками $z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{j(k_j-1)}$, $M_j < z_{j1} < z_{j2} < \dots < z_{j(k_j-1)} < m_j$. Через эти точки оси Oz проведем плоскости, параллельные плоскости Oxy , тем самым вышеуказанную область V_j разобьем на k_j частей. Эти части и их объемы обозначим $\Delta V_{j1}, \Delta V_{j2}, \dots, \Delta V_{jk_j}$, где V_{jl} — часть области V_j , заключенная между плоскостями $z = z_{j(l-1)}$ и $z = z_{jl}$ ($z_{j0} = M_j, z_{jk_j} = m_j$). Сказанное относится к любой из частей V_j области V , $j = 1, 2, \dots, n_*$. Следовательно, область V оказывается разбитой на n частей, где $n = k_1 + k_2 + \dots + k_{n_*}$.

При вышеуказанном разбиении области V_j на части предыдущая формула в силу соответствующих свойств определенного и двойного интегралов может быть записана так:

$$\begin{aligned}
 & \iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \\
 & = \sum_{j=1}^{n_*} \iint_{\Delta\sigma_j} dx dy \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{z_{j1}} f(x, y, z) dz + \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} f(x, y, z) dz + \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + \int_{z_{j(k_j-1)}}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) = \sum_{j=1}^{n_*} \left(\iint_{\Delta\sigma_j} dx dy \int_{\Phi_1(x,y)}^{z_{j1}} f(x, y, z) dz + \right. \\
 & \quad \left. + \iint_{\Delta\sigma_j} dx dy \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} f(x, y, z) dz + \dots + \iint_{\Delta\sigma_j} dx dy \int_{z_{j(k_j-1)}}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right).
 \end{aligned}$$

В последней сумме каждое из слагаемых преобразуем по теореме о среднем значении, тогда предыдущее соотношение примет вид

$$\begin{aligned}
 & \iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \\
 & = \sum_{j=1}^{n_*} [f(P_{j1})\Delta V_{j1} + f(P_{j2})\Delta V_{j2} + \dots + f(P_{jk_j})\Delta V_{jk_j}],
 \end{aligned}$$

где $P_{j1}, P_{j2}, \dots, P_{jk_j}$ — соответственно некоторые точки частей $\Delta V_{j1}, \Delta V_{j2}, \dots, \Delta V_{jk_j}$ области V , $j = 1, 2, \dots, n_*$. Правая часть этой формулы есть сумма n слагаемых вида $f(P_i)\Delta V_i$, где ΔV_i — любая из частей, на которые разбита область V , P_i — некоторая точка части ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, рассматриваемую формулу можно записать так:

$$\iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i.$$

Эта формула справедлива также для любого достаточно большого n , когда достаточно мал $\max d_i$ — наибольший из диаметров частей ΔV_i . Это означает, что предел суммы правой части последней формулы при $n \rightarrow \infty$, $\max d_i \rightarrow 0$ равен левой части:

$$\iint_D dx dy \int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i.$$

Но здесь под знаком предела стоит интегральная сумма для непрерывной функции $f(x, y, z)$ и области V , в которой функция $f(x, y, z)$ задана, поэтому предел указанной интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$, $\max d_i \rightarrow 0$ равен тройному интегралу по области V от функции $f(x, y, z)$, т. е. получаем формулу (13.26).

Если область V имеет более общий вид, чем указано выше, и может быть разбита на части, для которых справедлива формула (13.26), то тройной интеграл по рассматриваемой области V будет равен сумме тройных интегралов по указанным ее частям.

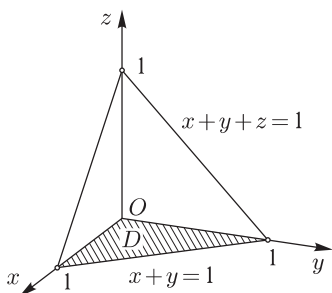


Рис. 13.23

Пример. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = xyz$ по области V , ограниченной координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, а также плоскостью $x + y + z = 1$.

Областью D служит треугольник, ограниченный осями Ox , Oy и прямой с уравнением $x + y = 1$, по которой плоскость $x + y + z = 1$ пересекается с плоскостью Oxy (рис. 13.23). Снизу область V ограничена плоскостью Oxy с уравнением $z = 0$, следовательно, $\Phi_1(x, y) = 0$. Сверху область V ограничена плоскостью с уравнением $x + y + z = 1$. Значит, $z = 1 - x - y$; следовательно, $\Phi_2(x, y) = 1 - x - y$. Поэтому

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} xyz dz. \quad (13.28)$$

Сначала возьмем интеграл по z правой части при $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Здесь согласно формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_0^{1-x-y} xyz dz = \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} = \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2.$$

Это выражение подставим в правую часть формулы (13.28) и получим

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \frac{1}{2} \iint_D xy(1-x-y)^2 dx dy. \quad (13.29)$$

Остается вычислить двойной интеграл в правой части формулы (13.29). Для этого выразим его через двукратный, учитывая, что область D расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 1$, т.е. $a = 0$, $b = 1$. Область D с одной стороны ограничена осью Ox , т.е. $\varphi_1(x) = 0$. С другой стороны область D ограничена прямой $x + y = 1$, т.е. $y = 1 - x$; следовательно, $\varphi_2(x) = 1 - x$, и получим

$$\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 \, dy.$$

Окончательные вычисления предлагаем проделать самостоятельно, замечая, что $(1-x-y)^2 = (1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2$.

§ 13.13. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле

Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы область V , проецирующаяся в область D на плоскости Oxy (рис. 13.24), и функция $f(x, y, z)$, непрерывная в области V , тогда согласно (13.26) справедлива формула

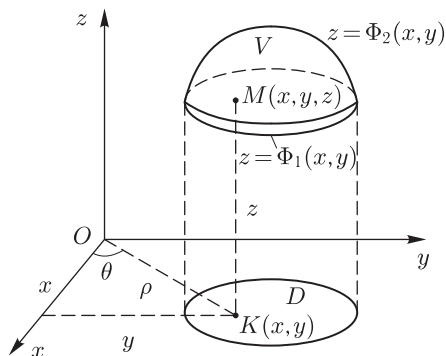


Рис. 13.24

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz. \quad (13.30)$$

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка области V , $K(x, y)$ — проекция точки M на плоскость Oxy . Абсцисса x и ордината y точки $K(x, y)$ такие же, как и у точки M . На плоскости Oxy , кроме декартовой, введем еще, как и в § 13.9, полярную систему координат, в которой θ и ρ — полярные координаты точки K . Тогда числа θ , ρ , z определяют

положение точки M в пространстве. Эти числа — *цилиндрические координаты* точки M в пространстве, они отличаются от декартовых координат тем, что вместо x и y используются полярные координаты θ , ρ . Для перехода к цилиндрическим координатам достаточно в правой части формулы (13.30) в двойном интеграле перейти от декартовых к полярным координатам, взяв $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $dx dy = \rho d\theta d\rho$. Тогда формула (13.30) примет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D'} \rho d\theta d\rho \int_{\Phi_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{\Phi_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz.$$

В правой ее части берется двойной интеграл по области D' в декартовой системе $O'\theta\rho$, который можно выразить через двукратный. В интеграле по z пределы интегрирования представляют собой правые части уравнений поверхностей, ограничивающих область V , с заменами $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Эти пределы — правые части уравнений поверхностей в цилиндрических координатах.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 14.1. Криволинейные интегралы по координатам и их вычисление

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB (рис. 14.1), на которой заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Считаем их непрерывными функ-

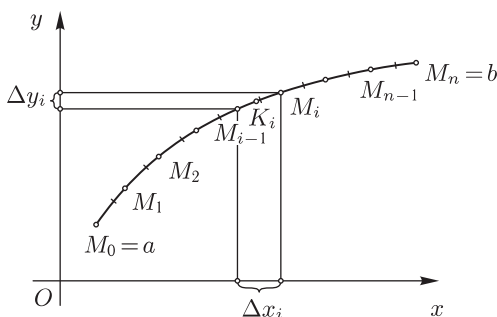


Рис. 14.1

циями точки $M(x, y)$ кривой AB : $P(x, y) = P(M)$, $Q(x, y) = Q(M)$, т. е. для любой фиксированной точки M_* кривой AB имеют место равенства $\lim_{M \rightarrow M_*} P(M) = P(M_*)$, $\lim_{M \rightarrow M_*} Q(M) = Q(M_*)$. На кривой AB установим положительное направление, считая точку A началом, точку B концом. Кривую AB разобьем на n частей точками $M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$ (точки A и B обозначим M_0 и M_n соответственно), так чтобы индексы точек деления возрастали при движении от точки A к B . Координаты точек обозначим $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, а разность координат $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Здесь Δx_i и Δy_i — проекции направленной дуги $\overline{M_{i-1}M_i}$ (и вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$) на оси Ox и Oy соответственно.

Пусть $K_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка дуги $M_{i-1}M_i$. Вычислим в ней значение функции $P(K_i) = P(\xi_i, \eta_i)$ и умножим это значение

на Δx_i . Вычислим аналогичные произведения для всех дуг кривой и найдем их сумму $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$.

Пусть Δs_i — длина дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$, $\max \Delta s_i$ — наибольшая из всех длин Δs_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Число делений n устремим к бесконечности так, чтобы $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, т. е. чтобы все дуги $M_{i-1}M_i$ стягивались в точки. При этом для всех i имеем $\Delta x_i \rightarrow 0$, $\Delta y_i \rightarrow 0$. Если существует конечный предел $\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек $K_i(\xi_i, \eta_i)$, то этот предел называется *криволинейным интегралом* по координате x от функции $P(x, y)$ и обозначается $\int_{AB} P(x, y) dx$:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i. \quad (14.1)$$

Точно так же вводится криволинейный интеграл по координате y :

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i. \quad (14.2)$$

Сумма двух интегралов по координатам x, y называется *составным криволинейным интегралом по координатам x, y* и обозначается

$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Пусть теперь кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (14.3)$$

где значения $t = \alpha$ и $t = \beta$ отвечают точкам A и B соответственно. Пусть точкам $M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$ деления кривой AB отвечают значения t , равные соответственно $t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1}$, причем $t_0 = \alpha$ и $t_n = \beta$. Этими числами интервал $[\alpha, \beta]$ делится на n частей. Так как значению $t = t_{i-1}$ отвечает точка M_{i-1} , то ее абсцисса находится по формуле (14.3) при значении $t = t_{i-1}$, т. е. $x_{i-1} = x(t_{i-1})$. Аналогично $x_i = x(t_i)$. Их разность:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}). \quad (14.4)$$

Разность в правой части запишем по формуле Лагранжа:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}), \quad t_{i-1} < \theta_i < t_i.$$

Обозначим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, тогда (14.4) примет вид

$$\Delta x_i = x'(\theta_i) \Delta t_i. \quad (14.5)$$

В качестве K_i возьмем ту точку, которая отвечает значению $t = \theta_i$, координаты точки K_i вычислим по формуле (14.3) при $t = \theta_i$: $\xi_i = x(\theta_i)$, $\eta_i = y(\theta_i)$. Эти значения, а также выражение (14.5) для Δx_i подставим в (14.1) и получим

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x(\theta_i), y(\theta_i)) x'(\theta_i) \Delta t_i. \quad (14.6)$$

Будем считать, что $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны в интервале $[\alpha, \beta]$. Тогда и функция $P(x(t), y(t), x'(t))$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$. В правой части (14.6) стоит ее интегральная сумма, следовательно, предел в (14.6) есть определенный интеграл от указанной функции, взятый по интервалу $[\alpha, \beta]$:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt. \quad (14.7)$$

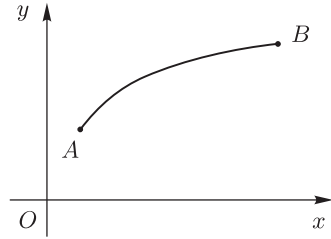


Рис. 14.2

Эта формула позволяет вычислить криволинейный интеграл по координате x вдоль кривой AB (рис. 14.2), заданной параметрическими уравнениями (14.3), так как выражает его через определенный интеграл.

Аналогично для криволинейного интеграла по координате y будем иметь

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (14.8)$$

Сложив почленно (14.7) и (14.8), получим

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Итак, чтобы криволинейный интеграл по координатам вдоль кривой AB , заданной параметрически уравнениями (14.3), выразить через определенный интеграл, нужно положить $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$ и учесть, что пределы $t = \alpha$ и $t = \beta$ отвечают соответственно началу A и концу B кривой AB .

В (14.9) поменяем местами A и B , а следовательно, α и β . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\beta}^{\alpha} \{P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Здесь B — начало, A — конец кривой. Правые части (14.9) и (14.10) отличаются лишь знаком, поэтому

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Таким образом, при изменении направления кривой криволинейный интеграл по координатам меняет знак. Остальные свойства криволинейных интегралов аналогичны свойствам определенных интегралов.

Например, если кривая AB разбита точкой M на две части, то

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AM} P dx + Q dy + \int_{MB} P dx + Q dy,$$

где $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$.

Отметим, что если конец B кривой совпадает с ее началом A , то получаем замкнутую линию L . В этом случае за положительное направление берут движение против хода часовой стрелки. Интеграл вдоль замкнутой линии L обозначается так:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \text{или} \quad \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Пример. Требуется вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} xy dx + (x + y) dy$$

вдоль кривой AB с уравнением $y = x^2$, соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$ (рис. 14.3).

Рассматриваемая кривая является частью параболы. Чтобы воспользоваться формулой (14.9), нужно записать уравнение кривой в параметрическом виде: положим $x = t$, тогда $y = t^2$. Таким образом, получили уравнения вида (14.3), в которых $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, поэтому $x'(t) = 1$

и $y'(t) = 2t$. Точке A отвечает значение $t = x = 0$, точке B — значение $t = x = 1$. По формуле (14.9) искомый интеграл:

$$\int_{AB} xy \, dx + (x + y) \, dy = \int_0^1 (3t^3 + 2t^2) \, dt = \frac{17}{12}.$$

Запишем еще две формулы, аналогичные (14.7) и (14.8). Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, a, b — соответственно абсциссы точек A и B .

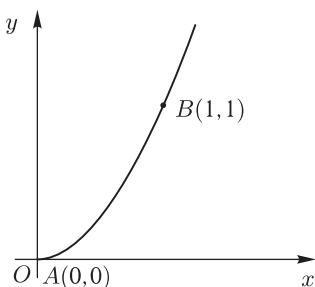


Рис. 14.3

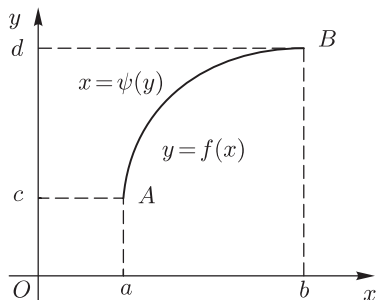


Рис. 14.4

Это уравнение запишем в параметрическом виде, положив $x = t$, и получим $y = f(t)$, $x = x(t) = t$, $a \leq t \leq b$. Согласно (14.7), учитывая, что $x'(t) = 1$, будем иметь

$$\int_{AB} P(x, y) \, dx = \int_a^b P[t, f(t)] \, dt. \quad (14.11)$$

Как известно, определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому в правой части формулы (14.11) переменную t можно заменить на x :

$$\int_{AB} P(x, y) \, dx = \int_a^b P[x, f(x)] \, dx. \quad (14.12)$$

Формула (14.12) выражает криволинейный интеграл по координате x через определенный интеграл, когда кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Аналогично можно показать, что если кривая AB задана уравнением $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$ (рис. 14.4), то криволинейный интеграл по координате y для кривой AB вычисляется по формуле

$$\int_{AB} Q(x, y) \, dy = \int_c^d Q[\psi(y), y] \, dy. \quad (14.13)$$

§ 14.2. Применение криволинейных интегралов к вычислению работы

Пусть путь совпадает с вектором $\vec{S}$ и сила $\vec{F}$ постоянна (по модулю и направлению), тогда работа силы $\vec{F}$ на пути $\vec{S}$ определяется формулой

$$\tilde{A} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi = (\vec{F}, \vec{S}), \quad (14.14)$$

где φ — угол между $\vec{S}$ и $\vec{F}$.

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB (рис. 14.5), и в точке $M(x, y)$ этой кривой приложена сила $\vec{F}$ с проекциями F_x, F_y на оси

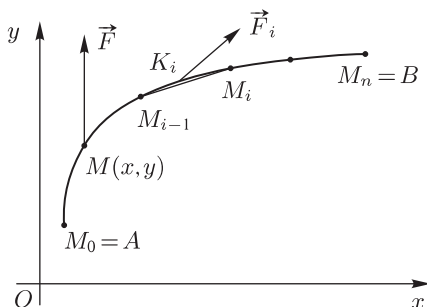


Рис. 14.5

координат. Будем считать, что эта сила, а следовательно, и ее проекции, являются переменными и зависят от x, y — координат точки M . Это значит, что F_x, F_y — функции двух переменных x, y . Обозначим их через $F_x(x, y), F_y(x, y)$. Итак, $\vec{F} = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Полагаем, что функции $F_x(x, y), F_y(x, y)$ заданы и непрерывны всюду на кривой AB .

Требуется найти работу $\tilde{A}$, которую совершает переменная сила $\vec{F}$, когда точка M ее приложения перемещается от начала A до конца B кривой AB .

Разобьем AB на n частей точками $M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$. Обозначим соответственно точки A и B через M_0 и M_n , координаты произвольной точки M_i — через (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq n$), разности координат $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Проекции вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ на оси координат равны разностям координат конца и начала: $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$.

На дуге $\overline{M_{i-1}M_i}$ возьмем произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной силы $\vec{F}_i = (F_x(\xi_i, \eta_i), F_y(\xi_i, \eta_i))$. В силу малости участка $M_{i-1}M_i$ кривой AB приближенно можно считать, что, во-первых, этот участок является прямолинейным и совпадает с $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и, во-вторых, на этом участке сила $\vec{F}$ из-

меняется мало, остается постоянной и равна $\vec{F}_i$ — силе, вычисленной в точке K_i . Таким образом, работа $\tilde{A}_i$ силы $\vec{F}$ на участке $M_{i-1}M_i$ кривой AB согласно (14.14) будет приближенно равна скалярному произведению $(\vec{F}_i, \overrightarrow{M_{i-1}M_i})$. Это скалярное произведение запишем в виде суммы произведений одноименных проекций и получим $\tilde{A}_i \approx F_x(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + F_y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$.

Аналогично найдем работу силы $\vec{F}$ на всех участках кривой AB . Сложим все $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ и получим приближенно работу на кривой AB :

$$\tilde{A} \approx \sum_{i=1}^n F_x(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n F_y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Это равенство тем точнее, чем меньше все длины Δs_i дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$. Точное значение $\tilde{A}$ найдем, когда в последнем соотношении в правой части перейдем к пределу при условии, что $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta s_i \rightarrow 0$. Тогда получим (учитывая, что предел правой части равен сумме пределов первой и второй сумм)

$$\tilde{A} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_x(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Но предел первой суммы равен криволинейному интегралу по координате x , а предел второй — криволинейному интегралу по координате y . Итак,

$$\tilde{A} = \int_{AB} F_x(x, y) dx + \int_{AB} F_y(x, y) dy.$$

§ 14.3. Формула Грина. Связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом по координатам

Теорема 14.1 (Грина). Пусть D — конечная область, ограниченная замкнутой линией L и расположенная в плоскости Oxy . Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, их частные производные $\partial P(x, y)/\partial y$ и $\partial Q(x, y)/\partial x$ непрерывны всюду в области D и на кривой L . Тогда справедлива формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (14.15)$$

(здесь в правой части криволинейный интеграл по координатам берется вдоль кривой L , на которой за положительное принято направление обхода против часовой стрелки).

Формула (14.15) называется формулой Грина.

Доказательство. Пусть область D расположена между прямыми $x = a$, $x = b$, где a , b — соответственно абсциссы точек A, B границы L области D (рис. 14.6), а участки ACB , $\widetilde{ADB}$ кривой L

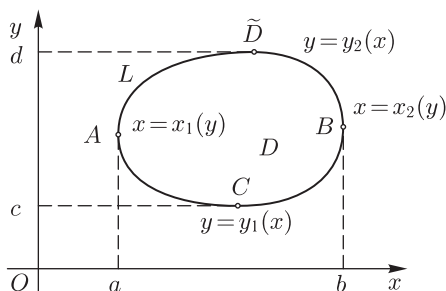


Рис. 14.6

заданы соответственно уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Согласно формуле (13.10) вычисления двойного интеграла имеем

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy. \quad (14.16)$$

Здесь в правой части внутренний интеграл берется по y при $x = \text{const}$, т.е. подынтегральная функция зависит лишь от y . Но она является производной по y от функции $P(x, y)$ при $x = \text{const}$. Следовательно, $P(x, y)$ есть первообразная для $\partial P(x, y)/\partial y$. Далее, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)).$$

Эту разность подставим в правую часть формулы (14.16) вместо внутреннего интеграла. Тогда

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \quad (14.17)$$

С другой стороны, запишем криволинейный интеграл по координате x от функции $P(x, y)$ для кривой L . Так как эта кривая состоит из двух частей, то

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{ACB} P(x, y) dx + \int_{\widetilde{BDA}} P(x, y) dx. \quad (14.18)$$

В правой части (14.18) во втором интеграле на кривой $B\widetilde{D}A$ изменим направление обхода, тогда знак этого интеграла изменится на обратный. Итак,

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{ACB} P(x, y) dx - \int_{A\widetilde{D}B} P(x, y) dx. \quad (14.19)$$

Каждое из слагаемых правой части (14.19) выразим через определенный интеграл по формуле (14.12), получим

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_2(x)) dx. \quad (14.20)$$

Правые части формул (14.17) и (14.20) отличаются лишь знаком, поэтому и левые их части отличаются знаком:

$$- \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_L P(x, y) dx. \quad (14.21)$$

Записав уравнения частей $CA\widetilde{D}$, $CB\widetilde{D}$ границы L в виде $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и используя формулу (14.13), получим

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (14.22)$$

Сложив почленно (14.21) и (14.22), придем к формуле Грина (14.15).

§ 14.4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ заданы всюду на плоскости Oxy и непрерывны в любой конечной части этой плоскости; A, B — произвольные точки, соединенные произвольной дугой (рис. 14.7). Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (14.23)$$

Если точки A, B соединить кривой AMB , а затем кривой AKB , то интегралы вида (14.23), взятые вдоль этих кривых, вообще говоря, не будут равны друг другу. Это ясно из формул

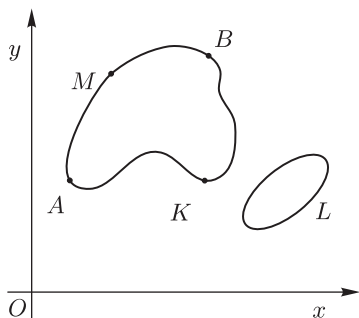


Рис. 14.7

для вычисления таких интегралов (§ 14.1). Возникает вопрос: когда криволинейный интеграл (14.23) не будет зависеть от формы кривой, соединяющей точки A и B , т. е. когда для всех кривых, соединяющих эти точки, интеграл (14.23) будет иметь одно и то же значение и, следовательно, будет зависеть только от координат начала A и конца B кривой AB ?

Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем на плоскости Oxy произвольный замкнутый контур L с направлением обхода против часовой стрелки и криволинейный интеграл вдоль этой кривой

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (14.24)$$

Теорема 14.2. Если криволинейный интеграл (14.23) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования, то криволинейный интеграл (14.24) вдоль любой замкнутой кривой L равен нулю и, наоборот, если криволинейный интеграл (14.24) вдоль любой замкнутой кривой L равен нулю, то криволинейный интеграл (14.23) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования.

Доказательство. Пусть интеграл (14.23) не зависит от линии интегрирования. Возьмем произвольный замкнутый контур L на плоскости Oxy , расположим на нем точки A, B, K, M (рис. 14.8). Тогда

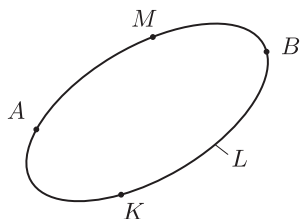


Рис. 14.8

$$\begin{aligned} \int_{AKB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_{AMB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned} \quad (14.25)$$

В правой части формулы (14.25) изменим направление обхода кривой AMB на противоположное, знак перед интегралом изменится на противоположный, и

$$\int_{AKB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{BMA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (14.26)$$

Но левая часть (14.26) равна интегралу вдоль замкнутого контура L , следовательно,

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (14.27)$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Теперь докажем вторую часть.

Известно, что интеграл (14.24) равен нулю, и нужно доказать, что интеграл (14.23) не зависит от линии интегрирования. Возьмем любые

две точки A, B на плоскости Oxy и проведем через них любой замкнутый контур L . Для него имеет место соотношение (14.27), поэтому справедливы соотношения (14.26), а следовательно, и (14.25). Теорема доказана.

Теорема 14.3. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\partial P(x, y)/\partial y$, $\partial Q(x, y)/\partial x$ непрерывны в любой конечной части плоскости Oxy . Тогда если во всех точках плоскости Oxy выполняется соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (14.28)$$

то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (14.29)$$

для любых двух точек A, B плоскости Oxy не зависит от линии интегрирования.

Доказательство. Возьмем на плоскости Oxy произвольный замкнутый контур L , область внутри L обозначим через D и для нее запишем формулу Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (14.30)$$

В силу равенства (14.28) подынтегральное выражение в левой части формулы (14.30) равно нулю, следовательно, и вся левая часть равна нулю, поэтому равен нулю и криволинейный интеграл в правой части формулы (14.30). Итак, $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$.

Таким образом, последний криволинейный интеграл вдоль любого замкнутого контура L равен нулю. Тогда, согласно теореме 14.2, интеграл (14.29) от линии интегрирования не зависит. Доказательство завершено.

Справедлива и обратная

Теорема 14.4. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в любой конечной части плоскости Oxy и для любых двух точек A и B криволинейный интеграл (14.29) не зависит от линии интегрирования, то соотношение (14.28) имеет место во всех точках плоскости Oxy .

Доказательство. Нужно доказать, что во всех точках плоскости Oxy выполняется соотношение $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Предположим, что оно не выполняется в некоторой точке M_0 , т.е. выполняется, например, неравенство

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} > 0. \quad (14.31)$$

Так как в силу условий теоремы разность $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ есть функция, непрерывная в точке M_0 , то для значений этой функции $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)_M \rightarrow (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)_{M_0}$ при $M \rightarrow M_0$. Отсюда в силу определения предела функции двух переменных с учетом неравенства (14.31) следует, что найдется круг D достаточно малого радиуса δ с центром в точке M_0 , для любой точки M которого справедливо соотношение $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)_M > \frac{1}{2} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)_{M_0}$. Следовательно,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma > \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} d\sigma > 0. \quad (14.32)$$

Рассмотрим формулу Грина (14.15) для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, и круга D с границей L . Согласно (14.32) ее левая часть положительна, поэтому $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy > 0$. Но в силу теоремы 14.2 этот интеграл должен быть равен нулю. Приходим к противоречию. К такому же заключению придем, предположив, что $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)_{M_0} < 0$. Таким образом, предположение о том, что в точке M_0 не выполняется условие $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, должно быть отброшено. Теорема доказана.

Теорема 14.3 может быть использована, в частности, при вычислении криволинейного интеграла вида (14.29). Пусть, например, требуется вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} y dx + x dy$ вдоль некоторой (произвольной) заданной кривой, соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$. Здесь $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$, поэтому соотношение (14.28) выполняется, и при вычислении рассматриваемого интеграла в качестве кривой AB для упрощения выкладок можно взять отрезок прямой, соединяющий точки A и B , с уравнением $y = x$, $0 \leq x \leq 1$. Положив $x = t$, придем к параметрическим уравнениям этого отрезка: $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$. Используя формулу (14.10), получим

$$\int_{AB} y dx + x dy = \int_0^1 t dt + t dt = 2 \int_0^1 t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1.$$

§ 14.5. Криволинейный интеграл по длине

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB (рис. 14.9). На ней, в отличие от случая криволинейных интегралов по координатам, направление устанавливать не будем. Пусть на этой кривой задана функция

$f(x, y)$, которую считаем непрерывной функцией точки $M(x, y)$ кривой AB : $f(x, y) = f(M)$.

Разобьем кривую AB на n частей точками $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$. Обозначим точки A, B соответственно через M_0 и M_n , а длину дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$ — через Δs_i ($\Delta s_i > 0$).

На этой дуге возьмем произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим в ней значение $f(\xi_i, \eta_i)$ заданной функции $f(x, y)$ и найдем произведение $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$. Подобную операцию проделаем со всеми частями кривой AB . Образует сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$. Пусть

$\max \Delta s_i$ — наибольшая из всех длин $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Пусть число делений $n \rightarrow \infty$ так, что

$\max \Delta s_i \rightarrow 0$, т.е. все части кривой AB стягиваются в точки. Если при этом независимо от способа разбиения кривой и от выбора точек K_i сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ имеет конечный предел, то он называется

криволинейным интегралом по длине кривой AB и обозначается $\int_{AB} f(x, y) ds$. Итак,

$\int_{AB} f(x, y) ds$. Итак,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \quad (14.33)$$

Получим формулу для вычисления криволинейного интеграла по длине, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями. В силу аналогии с криволинейным интегралом по координатам остановимся лишь на основных моментах.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (14.34)$$

Будем считать, что производные $x'(t), y'(t)$ непрерывны в интервале $[\alpha, \beta]$. Пусть точке A отвечает значение $t = \alpha$, а точке B — значение $t = \beta$. Разбиению на n частей кривой AB точками $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ отвечает разбиение интервала $[\alpha, \beta]$ значениями параметра t , соответствующими точкам деления $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Таким образом, точке M_i отвечает $t_i, i = 1, 2, \dots, n; t_0 = \alpha, t_n = \beta$.

Зная параметрические уравнения (14.34) дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$, для которой $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, запишем известную нам формулу (12.39) для вычисления

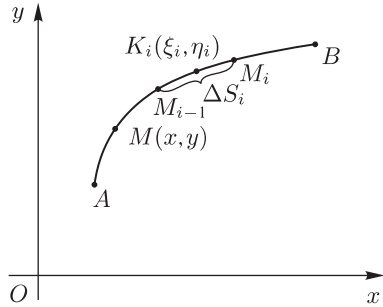


Рис. 14.9

длины Δs_i этой дуги: $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$. Интеграл в этой формуле запишем согласно свойству определенного интеграла в виде произведения значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке $t = \theta_i$, $t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i$, и длины интервала интегрирования $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. При этом предыдущая формула примет вид

$$\Delta s_i = \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i)} \cdot \Delta t_i, \quad t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i. \quad (14.35)$$

В качестве точки $K_i(\xi_i, \eta_i)$ возьмем ту, которая отвечает значению параметра $t = \theta_i$, тогда координаты точки K_i определяются по формулам (14.34), в которых $t = \theta_i$, т. е.

$$\xi_i = x(\theta_i), \quad \eta_i = y(\theta_i). \quad (14.36)$$

Выражения (14.35) и (14.36) подставим в правую часть формулы (14.33), тогда

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\max_{n \rightarrow \infty} \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[x(\theta_i), y(\theta_i)] \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Ясно, что в правой части последней формулы стоит предел интегральной суммы для функции $f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ и интервала $[\alpha, \beta]$, в котором функция задана. Этот предел равен определенному интегралу от указанной функции, поэтому

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (14.37)$$

До сих пор мы считали, что $\alpha < \beta$. Если $\alpha > \beta$, то перед интегралом в правой части нужно взять знак « $-$ ». Это следует из формулы (14.35), в которой теперь Δt_i надо заменить на $(-\Delta t_i)$.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} xy ds$, где кривая AB есть четверть $\overset{AB}{\text{окружности}}$ единичного радиуса с центром в точке $O(0, 0)$, расположенная в первой четверти плоскости Oxy (рис. 14.10).

В данном случае $f(x, y) = xy$. Пусть

$t = \widehat{(Ox, OM)}$ — угол, который считается положительным при отсчете от оси Ox против хода часовой стрелки. Тогда координаты точки M

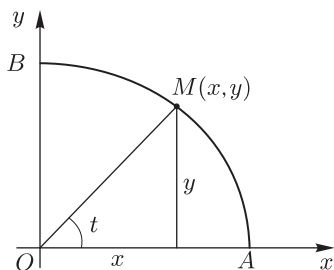


Рис. 14.10

окружности имеют вид $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Следовательно, $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$. Кроме того, $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$. Согласно (14.37) имеем

$$\int_{AB} xy \, ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = - \int_0^{\pi/2} \cos t \, d \cos t = \frac{1}{2}.$$

§ 14.6. Криволинейные интегралы вдоль пространственных кривых

Пусть на кривой AB (рис. 14.11) заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, которые считаем непрерывными функциями точки $M(x, y, z)$ этой кривой: $P(x, y, z) = P(M)$, $Q(x, y, z) = Q(M)$, $R(x, y, z) = R(M)$. Поступая, как в случае плоской кривой, введем понятие криволинейного интеграла по координате x от функции $P(x, y, z)$ вдоль кривой AB , затем понятие криволинейного интеграла по координате y от функции $Q(x, y, z)$ вдоль кривой AB и, наконец, понятие криволинейного интеграла по координате z от функции $R(x, y, z)$ вдоль кривой AB . Обозначения этих интегралов аналогичны обозначениям предыдущих:

$$\int_{AB} P(x, y, z) \, dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z) \, dy, \\ \int_{AB} R(x, y, z) \, dz.$$

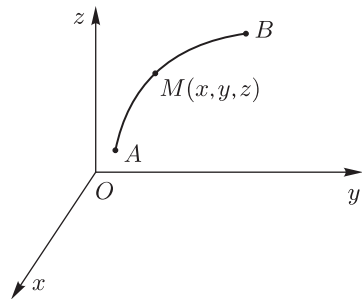


Рис. 14.11

Сумма этих интегралов называется *составным интегралом* по координатам вдоль кривой AB и обозначается

$$\int_{AB} P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (14.38)$$

Началу A кривой отвечает значение $t = \alpha$, а концу B — значение $t = \beta$. Поступая, как в случае плоской кривой, получим формулу для вычис-

ления последнего интеграла, когда кривая задана параметрическими уравнениями (14.38):

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + \\ + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t)\} dt. \end{aligned}$$

Пусть теперь на кривой AB задана непрерывная функция $f(x, y, z) = f(M)$ точки $M(x, y, z)$ этой кривой. Аналогично случаю плоской кривой введем понятие криволинейного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по длине пространственной кривой AB . Этот интеграл обозначается $\int_{AB} f(x, y, z) ds$. В случае, когда кривая AB задана уравнениями (14.38), интеграл вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (14.39)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы (14.37). Здесь надо учесть дополнительно, что для кривой AB , заданной уравнениями (14.38), $s = s(t)$ есть длина дуги AM этой кривой, отсчитываемая от точки A до точки M , координаты которой выражаются формулами (14.38). Обозначив через $t = t(s)$ функцию, обратную к $s = s(t)$, уравнения (14.38) запишем так: $x = x(t(s))$, $y = y(t(s))$, $z = z(t(s))$. Умножив эти уравнения на соответствующие базисные векторы и почленно сложив, перейдем к векторному уравнению кривой AB

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad \vec{r}'(s) = x(t(s)) \cdot \vec{i} + y(t(s)) \cdot \vec{j} + z(t(s)) \cdot \vec{k}.$$

Но, как было показано ранее (§ 8.7), $|\vec{r}'(s)| = 1$, поэтому

$$([x(t(s))]'_s)^2 + ([y(t(s))]'_s)^2 + ([z(t(s))]'_s)^2 = 1. \quad (14.40)$$

Заметим, что $t'_s = 1/s'_t$; при этом

$$[x(t(s))]'_s = \frac{x'_t}{s'_t}, \quad [y(t(s))]'_s = \frac{y'_t}{s'_t}, \quad [z(t(s))]'_s = \frac{z'_t}{s'_t}.$$

Подставив правые части этих соотношений в (14.40), получим

$$s'_t = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Но для последней функции первообразной является $s = s(t)$, поэтому

$$\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Отсюда ясно, что формулу (14.35) здесь нужно заменить следующей:

$$\Delta s_i = \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \cdot \Delta t_i, \quad t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i.$$

Отметим попутно, что, заменив в предпоследней формуле t_{i-1} и t_i соответственно на α и β , получим формулу для вычисления длины дуги пространственной кривой AB , заданной уравнениями (14.38).

§ 14.7. Применение кратных и криволинейных интегралов к вычислению координат центра тяжести тел

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана система материальных точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, массы которых равны соответственно $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ и $C(x_c, y_c, z_c)$ — центр тяжести этой системы (рис. 14.12). Известно, что координаты этого центра определяются по формулам

$$x_c = \sum_{i=1}^n x_i m_i / \sum_{i=1}^n m_i, \quad y_c = \sum_{i=1}^n y_i m_i / \sum_{i=1}^n m_i, \quad z_c = \sum_{i=1}^n z_i m_i / \sum_{i=1}^n m_i.$$

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано тело, занимающее область V (рис. 14.13), и $\gamma(x, y, z)$ есть плотность тела в точке $M(x, y, z)$. Будем считать, что всюду в области V задана непрерывная функция $\gamma(x, y, z)$, характеризующая распределение плотности вещества по всему телу (вообще говоря, неравномерное). Нужно найти x_c, y_c, z_c — координаты центра тяжести C рассматриваемого тела.

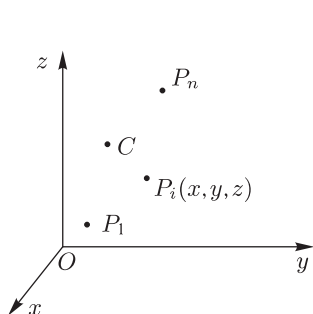


Рис. 14.12

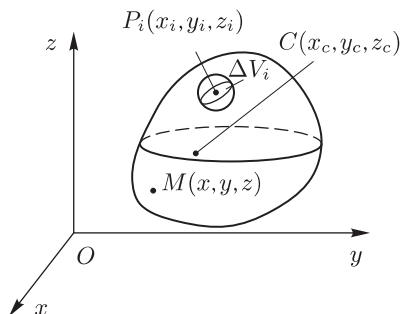


Рис. 14.13

Разобьем область V на n малых частей с объемами $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$. Внутри части с объемом ΔV_i возьмем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим в ней значение $\gamma(x_i, y_i, z_i)$ заданной плотности $\gamma(x, y, z)$. В силу малости части можно приближенно считать, что внутри ΔV_i плотность постоянна и равна $\gamma(x_i, y_i, z_i)$, поэтому масса m_i вещества внутри ΔV_i приближенно равна произведению этой плотности на ΔV_i :

$$m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (14.41)$$

Сказанное относится и ко всем остальным частям тела. В силу малости объема ΔV_i можно приближенно принять часть ΔV_i за материальную точку P_i с массой m_i . Это относится ко всем частям тела, тогда оно приближенно заменяется системой материальных точек P_i с массами m_i , определяемыми по формуле (14.41), где $i = 1, \dots, n$. Таким образом, получаем систему n точек. Координаты центра тяжести определяются приближенно по приведенным выше формулам, в которых m_i выражаются согласно (14.41). Итак,

$$x_c \approx \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i / \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Пусть d_i — диаметр области ΔV_i и $\max d_i$ — наибольший из всех диаметров частей области V . Последняя формула тем точнее, чем меньше наибольший из диаметров $\max d_i$. Чтобы получить точное значение x_c , в правой части последней формулы, нужно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$. Учтем, что предел отношения равен отношению пределов, и получим

$$x_c = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i / \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

В знаменателе под знаком предела стоит интегральная сумма для непрерывной функции $\gamma(x, y, z)$ и области V , в которой функция задана. Предел этой суммы равен тройному интегралу от функции $\gamma(x, y, z)$ по области V , а в числителе получим тройной интеграл от функции $x\gamma(x, y, z)$. Таким образом, окончательно получим формулу

$$x_c = \iiint_V x_i \gamma(x, y, z) dV / \iiint_V \gamma(x, y, z) dV, \quad dV = dx dy dz.$$

Аналогично получим выражения для координат y_c, z_c .

Пусть теперь в пространстве $Oxyz$ задана кривая AB , $M(x, y, z)$ — произвольная ее точка (рис. 14.14). Пусть $\gamma(x, y, z)$ — плотность вещества в точке $M(x, y, z)$. Это значит, что $\gamma(x, y, z) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta s)$. Здесь Δm — масса участка кривой длины Δs , внутри которого нахо-

дится точка M , и предел берется, когда $\Delta s \rightarrow 0$ и участок стягивается в точку M . Будем считать, что функция $\gamma(x, y, z)$, характеризующая распределение плотности по AB , задана всюду на кривой AB и непрерывна. Пусть $C(x_c, y_c, z_c)$ — центр тяжести кривой AB с указанной плотностью. Поступая аналогично предыдущему, можно показать, что

$$x_c = \int_{AB} x \gamma(x, y, z) ds / \int_{AB} \gamma(x, y, z) ds,$$

$$y_c = \int_{AB} y \gamma(x, y, z) ds / \int_{AB} \gamma(x, y, z) ds,$$

$$z_c = \int_{AB} z \gamma(x, y, z) ds / \int_{AB} \gamma(x, y, z) ds.$$

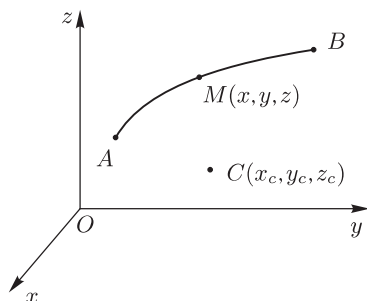


Рис. 14.14

Если кривая AB лежит на плоскости Oxy , то в предыдущих формулах нужно заменить $\gamma(x, y, z)$ на $\gamma(x, y)$ и положить $z_c = 0$, тогда

$$x_c = \int_{AB} x \gamma(x, y) ds / \int_{AB} \gamma(x, y) ds, \quad y_c = \int_{AB} y \gamma(x, y) ds / \int_{AB} \gamma(x, y) ds.$$

Пример. Требуется определить координаты центра тяжести четверти окружности радиуса 1 с центром в начале координат, заданной уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, если $\gamma(x, y) = 1$ всюду на рассматриваемой кривой.

Согласно последним формулам имеем

$$x_c = \int_{AB} x ds / \int_{AB} ds, \quad y_c = \int_{AB} y ds / \int_{AB} ds.$$

Здесь: $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Согласно (14.37) имеем:

$$\int_{AB} ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{\pi/2} dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{AB} x ds = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

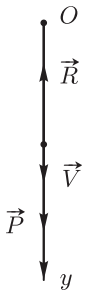
$$\int_{AB} y ds = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

$$x_c = \frac{2}{\pi}, \quad y_c = \frac{2}{\pi}.$$

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 15.1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях

К дифференциальным уравнениям приводятся многие задачи науки и техники. Рассмотрим одну из них — задачу о движении тела при вертикальном его падении под действием сил тяжести и сопротивления среды.



Пусть с некоторой высоты сброшено тело массой m , которое падает вертикально вниз (рис. 15.1).

Обозначим скорость тела $\vec{V}$, его силу тяжести $\vec{P}$, силу сопротивления среды $\vec{R}$. Модуль последней при небольших скоростях пропорционален скорости V , т. е. $R = kV$, где k — коэффициент пропорциональности, который определяется опытным путем и считается известным. Нужно найти закон $V = \varphi(t)$ изменения модуля скорости тела с течением времени t .

Рис. 15.1

Ось Oy проведем вертикально вниз и будем считать, что тело движется по этой оси.

Отметим, что модуль силы тяжести $P = mg$, где g — ускорение свободного падения. Сила $\vec{R}$ направлена противоположно вектору скорости.

Пусть $\vec{W}$ — ускорение тела. По второму закону Ньютона $m \cdot \vec{W} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ — сила, действующая на тело. В нашем случае эта сила есть равнодействующая сил $\vec{P}$ и $\vec{R}$, т. е. $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$. Подставив это выражение в предыдущее соотношение, получим $m \cdot \vec{W} = \vec{P} + \vec{R}$. В проекции на ось Oy это векторное равенство дает

$$m \cdot W_y = P_y + R_y. \quad (15.1)$$

Как известно из кинематики, проекция ускорения W_y равна производной dV_y/dt , где V_y — проекция скорости на ось Oy . Подставим

последнее выражение в (15.1) и получим

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = P_y + R_y. \quad (15.2)$$

Проекция вектора на ось равна его модулю (длине), умноженному на косинус угла между вектором и осью, поэтому проекция P_y силы $\vec{P}$ на ось y равна P , так как угол между осью Oy и вектором $\vec{P}$ равен нулю. Но $P = mg$, следовательно, $P_y = mg$. Аналогично $V_y = V$, $R_y = R \cdot \cos(\vec{R}, Oy) = -R$. Однако $R = kV$, поэтому $R_y = -kV$. Полученные выражения для P_y , R_y , V_y подставим в (15.2) и будем иметь $m dV/dt = mg - kV$.

Итак, получили соотношение, связывающее искомую функцию $V = \varphi(t)$ и ее производную dV/dt . Это соотношение есть дифференциальное уравнение для искомой функции $V = \varphi(t)$.

Определение. Дифференциальным уравнением называется соотношение, которое связывает независимую переменную x , искомую функцию $y = \varphi(x)$ и ее производные $y', y'', \dots$.

Дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (15.3)$$

где левая часть есть известное выражение, содержащее $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Если в дифференциальном уравнении искомая функция зависит от одного аргумента, то оно называется *обыкновенным уравнением*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной искомой функции, входящей в это уравнение. Например, $y' + xy = 0$ есть уравнение первого порядка, $y'' + y = 0$ — уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество (при подстановке функции $y = \varphi(x)$ в уравнение (15.3) заменяем $y, y', y'', \dots$ соответственно на $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots$).

Например, для уравнения

$$y'' + y = 0 \quad (15.4)$$

решением является функция $y = \sin x$. В этом легко убедиться, подставив эту функцию в уравнение (15.4). Также легко убедиться в том, что решением уравнения (15.4) является и функция $y = \cos x$. Наконец, функция вида $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, где $c_1, c_2 = \text{const}$, тоже является решением того же уравнения. Этот пример показывает, что обыкновенное дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

§ 15.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Как видно из формулы (15.3), обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка записываются так: $F(x, y, y') = 0$. В дальнейшем ограничимся случаем, когда уравнение можно представить в виде

$$y' = f(x, y), \quad (15.5)$$

где $f(x, y)$ — известное выражение, содержащее x, y , т.е. функция с аргументами x, y .

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (15.5). Этой функции на плоскости Oxy отвечает кривая — график этой функции (рис. 15.2).

Иногда ищут такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (15.5), график которого проходит через заданную точку (x_0, y_0) , т.е. выполняется равенство $y_0 = \varphi(x_0)$. Это условие называют *начальным условием*, которому удовлетворяет решение $y = \varphi(x)$ уравнения (15.5). Обычно начальное условие записывают в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (15.6)$$

Задача об отыскании решения уравнения первого порядка, удовлетворяющего условию (15.6), называется *задачей Коши*.

Теорема 15.1 (существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка). *Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ правая часть $f(x, y)$ и ее производная $\partial f(x, y)/\partial y$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy , причем эта область содержит внутри себя точку (x_0, y_0) , то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ (график которого проходит через точку (x_0, y_0)).*

Из этой теоремы сразу вытекает, что дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное число решений. В самом деле, в области D возьмем точку (x_0, y_1) . Так как эта точка имеет ту же абсциссу, что и исходная, и лежит в области D , то, согласно теореме, существует единственное решение дифференциального уравнения — функция $y = \varphi_1(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_1) .

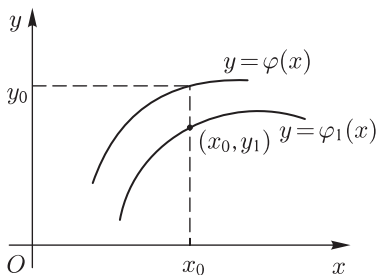


Рис. 15.2

Таким образом получаем еще одно решение дифференциального уравнения. Изменяя значения ординаты y , получим бесконечное число решений рассматриваемого дифференциального уравнения.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая произвольную постоянную C , называется *общим решением* дифференциального уравнения (15.5), если:

- эта функция при любых значениях постоянной C удовлетворяет уравнению (15.5);
- для любого начального условия $y|_{x=x_0} = y_0$ можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, при котором $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять этому начальному условию (здесь мы предполагаем, что точка (x_0, y_0) лежит в области D , указанной в условии теоремы).

Иногда общее решение уравнения (15.5) получается в форме, не разрешенной относительно y , т. е. в виде $\Phi(x, y, C) = 0$. Это соотношение называют *общим интегралом* уравнения (15.5).

Частным решением уравнения (15.5) называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, получаемое из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется *частным интегралом* уравнения (15.5).

График частного решения на плоскости Oxy называется *интегральной кривой* для дифференциального уравнения (15.5). Общему решению $y = \varphi(x, C)$ этого уравнения на плоскости Oxy отвечает семейство интегральных кривых, так как при разных значениях постоянной C получаем разные кривые на плоскости Oxy .

В качестве примера возьмем уравнение $y' = -x/y$. В дальнейшем покажем (§ 15.5), что это уравнение имеет общий интеграл $x^2 + y^2 = C^2$. Последнее соотношение при каждом конкретном значении C определяет на плоскости Oxy окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |C|$ (или точку, если $C = 0$). Изменяя значения C , получим семейство концентрических окружностей, представляющих собой интегральные кривые для данного дифференциального уравнения.

§ 15.3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка

Дано уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad (15.7)$$

где $f(x, y)$ — заданная функция от аргументов x, y . Для простоты будем считать, что эта функция определена на всей плоскости Oxy .

Возьмем на плоскости произвольную точку (x, y) с известными координатами и вычислим в ней значение заданной функции $f(x, y)$. По этому числу найдем угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y) = y'$. Иначе говоря, зная $\operatorname{tg} \alpha$, вычислим угол α в точке (x, y) и в этой

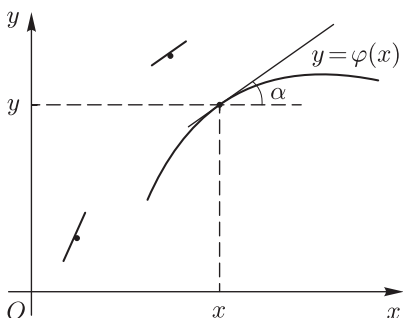


Рис. 15.3

проведем направление, образующее с осью Ox угол α (рис. 15.3). Это построение можно выполнить с помощью уравнения (15.7) в любой точке (x, y) плоскости Oxy . Таким образом, по дифференциальному уравнению (15.7) на плоскости Oxy для каждой ее точки будет определено некоторое направление. В таком случае говорят, что дифференциальному уравнению на плоскости Oxy отвечает *поле направлений*.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (15.7), график которого (интегральная кривая уравнения) проходит через точку (x, y) . Мы знаем, что значение производной $y' = \varphi'(x)$, вычисленное для значения x (абсциссы точки (x, y)), равно $\operatorname{tg} \tilde{\alpha}$ — тангенсу угла $\tilde{\alpha}$, образованного с осью Ox касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в ее точке (x, y) . Но функция $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (15.7), т.е. она вместе со своей производной удовлетворяет уравнению (15.7). Поэтому $\varphi'(x) = f(x, y)$, т.е. $\operatorname{tg} \tilde{\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ и $\tilde{\alpha} = \alpha$; значит, направление касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в ее точке (x, y) совпадает с направлением поля в этой точке, определенным по дифференциальному уравнению (15.7).

Итак, в любой точке интегральной кривой направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке. Это свойство используется для приближенного решения уравнения (15.7).

§ 15.4. Приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка (15.7), где функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в любой конечной части плоскости Oxy . Требуется найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения (15.7), удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, в интервале $x_0 \leq x \leq b$, где x_0, y_0, b — заданные числа. Согласно теореме 15.1, такое решение существует и единственно.

Выбрав целое число $n > 0$, разобьем интервал $[x_0, b]$ на n частичных интервалов $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, где $x_n = b$, задав

точки деления $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Искомая интегральная кривая проходит через точку (x_0, y_0) , угловой коэффициент касательной к ней в этой точке вычисляется по формуле $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_x|_{x=x_0} = f(x_0, y_0)$, поэтому уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$. На этой касательной возьмем точку (x_1, y_1) , у которой ордината равна $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Далее найдем число $\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_1, y_1)$, определяющее направление поля в точке (x_1, y_1) . Взяв это число в качестве углового коэффициента, запишем уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1). \quad (15.8)$$

Если число x_1 близко к x_0 , то точка (x_1, y_1) мало отличается от точки $(x_1, \widetilde{y}_1)$ искомой интегральной кривой, и угловой коэффициент прямой (15.8) мало отличается от $f(x_1, \widetilde{y}_1)$ — углового коэффициента касательной к интегральной кривой в точке $(x_1, \widetilde{y}_1)$.

На прямой (15.8) возьмем точку с абсциссой x_2 и ординатой $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$. Далее вычислим в точке (x_2, y_2) значение $\operatorname{tg} \alpha_2 = f(x_2, y_2)$ — число, определяющее направление поля в ней, и т. д. Таким образом, по формуле

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

будут найдены числа $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ и определены точки $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$. Соединив каждые две соседние точки прямолинейным отрезком, получим ломаную, которой приближенно можно заменить искомую интегральную кривую. Без доказательства отметим, что при $n \rightarrow \infty$, когда длины всех частичных интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) стремятся к нулю, вышеуказанная ломаная по форме стремится к искомой интегральной кривой.

Изложенный здесь метод называется *методом Эйлера*.

§ 15.5. Дифференциальные уравнения с разделенными и с разделяющимися переменными

Возьмем соотношение

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (15.9)$$

где $y = \varphi(x)$ — искомая функция от x , $M(x)$, $N(y)$ — заданные непрерывные функции своих аргументов, dx — дифференциал аргумента x , dy — дифференциал искомой функции. По определению дифференциал искомой функции есть

$$dy = y'_x dx. \quad (15.10)$$

Выражение для дифференциала dy подставим в (15.9) и полученное соотношение поделим на dx . Будем иметь

$$M(x) + N(y)y'_x = 0. \quad (15.11)$$

Но соотношение (15.11) есть дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому равносильное ему соотношение (15.9) также является дифференциальным уравнением первого порядка, которое называют *уравнением с разделенными переменными*. Чтобы его решить, перейдем с помощью формулы (15.10) к соотношению (15.11), в котором левая часть есть функция от x , так как y есть искомая функция от x . Учитывая это, от обеих частей соотношения (15.11) возьмем неопределенный интеграл по x , принимая во внимание, что интеграл от левой части будет равен сумме интегралов слагаемых, поэтому

$$\int M(x) dx + \int N(y)y'_x dx = \int 0 dx. \quad (15.12)$$

Во втором интеграле левой части учтем соотношение (15.10), интеграл справа равен произвольной постоянной, следовательно,

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

Взяв первый интеграл по x , получим некоторую функцию $F_1(x)$, взяв второй интеграл по y , получим функцию $F_2(y)$. Теперь исходное соотношение примет вид $F_1(x) + F_2(y) = C$. Это и есть общий интеграл уравнения (15.9). Таким образом, чтобы получить общий интеграл, в уравнении с разделенными переменными (15.9), нужно функцию $M(x)$ проинтегрировать по x , функцию $N(y)$ — по y и полученную сумму приравнять C .

Пример. Решить уравнение $x dx + y dy = 0$.

Это уравнение с разделенными переменными, так как оно имеет вид (15.9). Его общий интеграл $\int x dx + \int y dy = C_1$, $x^2/2 + y^2/2 = C_1$, т. е. $x^2 + y^2 = 2C_1$. Обозначив $2C_1 = C$, получим $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$. Это соотношение действительно является общим интегралом рассмотренного уравнения, так как для любого начального условия $y|_{x=x_0} = y_0$, т. е. точки (x_0, y_0) , найдется такое значение постоянной $C = C_0 = x_0^2 + y_0^2$, при котором интегральная кривая $x^2 + y^2 = C_0$ проходит через точку (x_0, y_0) . Такой же общий интеграл имеет уравнение $y' = -x/y$. Легко видеть, что оно равносильно исходному уравнению.

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (15.13)$$

где $M_1(x)$, $M_2(x)$ — заданные непрерывные функции от x , $N_1(y)$, $N_2(y)$ — заданные непрерывные функции от y и $y = \varphi(x)$ — искомая функция.

Предположив, что $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, соотношение (15.13) почленно умножим на $[N_1(y)M_2(x)]^{-1}$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Это уравнение решается, как указано выше, и его общий интеграл имеет вид

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C.$$

Пусть, например, имеется уравнение $y(1+x)dx + y^2x dy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, так как оно имеет вид (15.13). Умножим обе его части на $(yx)^{-1}$, считая $yx \neq 0$, и получим $(1+x)x^{-1}dx + y dy = 0$. Общий интеграл уравнения имеет вид $\int (1+x)x^{-1} dx + \int y dy = C$. Получаем в итоге общий интеграл $\ln x + x + y^2/2 = C$. Заметим, что $y = 0$ также является частным решением уравнения. Это очевидное решение интереса не представляет, так как мы рассматриваем решение, для которого выполняется условие $xy \neq 0$. Аналогичные очевидные решения появляются и в общем случае уравнения (15.13), если в некоторых точках $N_1(y)$, $M_2(x)$ обращаются в нуль.

§ 15.6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Однородными называются дифференциальные уравнения первого порядка $y'_x = f(x, y)$ с искомой функцией $y = \varphi(x)$, в которых правую часть $f(x, y)$ можно представить в виде функции одного аргумента, равного отношению y/x , т. е. в виде функции $F(y/x)$. Такое дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$y'_x = F(y/x). \quad (15.14)$$

Будем считать, что здесь F есть непрерывная функция своего аргумента.

Чтобы решить это уравнение, положим $U = y/x$. Так как y есть искомая функция от x , ясно, что $U = U(x)$ тоже есть функция с аргументом x . Будем искать эту последнюю функцию. Для нее получим дифференциальное уравнение, используя исходное уравнение (15.14).

Имеем $y = x \cdot U$. Продифференцировав это соотношение по x , получим $y'_x = U + x \cdot U'_x$. Тогда уравнение (15.14) приобретает вид

$U'_x x + U = F(U)$. Получили дифференциальное уравнение первого порядка для функции $U(x)$. Запишем его иначе: $x \cdot \frac{dU}{dx} = F(U) - U$, или, умножив на dx , в виде $x \cdot dU - (F(U) - U)dx = 0$. Но это есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида (15.13). Обе части уравнения умножим на $[x(F(U) - U)]^{-1}$, считая, что $x(F(U) - U) \neq 0$, и получим $\frac{dU}{F(U) - U} - \frac{dx}{x} = 0$. Общий интеграл последнего уравнения имеет вид $\int \frac{dU}{F(U) - U} - \int \frac{dx}{x} = C$. Учитывая, что первый интеграл в левой части равен некоторой функции $\Phi(U)$, имеем $\Phi(U) - \ln x = C$. Последнее выражение представляет собой общий интеграл дифференциального уравнения для функции $U(x)$. Чтобы получить общий интеграл исходного уравнения (15.14), достаточно в последнем соотношении заменить U на y/x . В результате будем иметь $\Phi(y/x) - \ln x = C$.

Здесь мы считали, что $F(U) - U \neq 0$; при $F(U) = U$ уравнение (15.14) имеет вид $y' = y/x$ и является уравнением с разделяющимися переменными. Запишем его так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

после интегрирования обеих частей будем иметь

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln C_1.$$

Отсюда $y = C_1 x$. Итак, $y = C_1 x$ при $F(y/x) = y/x$.

Пример. Возьмем уравнение $y'_x = xy/(x^2 - y^2)$. Числитель и знаменатель правой части этого уравнения поделим на x^2 и получим $y'_x = \frac{y/x}{1 - (y/x)^2}$. Правая часть этого уравнения является функцией одного аргумента y/x . Таким образом, рассматриваемое уравнение есть однородное, поэтому оно решается вышеуказанным методом.

Положим $y/x = U$. Тогда $y = x \cdot U$ и $y'_x = U + x \cdot U'_x$. Теперь исходное уравнение приобретает вид $U + x \cdot U'_x = U/(1 - U^2)$, или $x dU/dx = U/(1 - U^2) - U$. Приведем к общему знаменателю правую часть и, умножив это уравнение на dx , получим $x dU - U^3(1 - U^2)^{-1} dx = 0$. Разделив переменные, при $U \neq 0$ будем иметь $\frac{1 - U^2}{U^3} dU - \frac{dx}{x} = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - U^2}{U^3} dU - \int \frac{dx}{x} &= C, \quad \int \frac{dU}{U^3} - \int \frac{dU}{U} - \ln x = C, \\ -\frac{U^{-2}}{2} - \ln U - \ln x &= C. \end{aligned}$$

Так как $U = y/x$, получим общий интеграл рассматриваемого уравнения $-(y/x)^{-2}/2 - \ln y = C$.

При $U = 0$ имеем $y = 0$. Это еще одно (частное) решение уравнения.

§ 15.7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называются уравнения вида

$$y'_x + p(x)y = q(x), \quad (15.15)$$

где $y = \varphi(x)$ — искомая функция, а $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции от x , которые считаем непрерывными в рассматриваемом интервале изменения x .

Будем искать решение $y(x)$ этого уравнения в виде произведения двух функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$. При этом ясно, что одну («лишнюю») из введенных функций мы можем выбрать по своему усмотрению, а вторую должны подобрать так, чтобы произведение $y = UV$ было решением исходного уравнения (15.15).

Найдем производную $y'_x = U'_x V + UV'_x$. Подставим ее и выражение $y = UV$ в уравнение (15.15) и потребуем, чтобы оно выполнялось. Получим $U'_x V + UV'_x + p(x)UV = q(x)$ или

$$U'_x V + U(V'_x + p(x)V) = q(x). \quad (15.16)$$

Выберем функцию $V(x)$ так, чтобы в левой части сумма в скобках обратилась в нуль: $V'_x + p(x)V = 0$, или $dV/dx + p(x)V = 0$. После умножения на dx получим для нахождения функции $V(x)$ дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $dV + p(x)Vdx = 0$. Решив его, получим общий интеграл этого уравнения $\int \frac{dV}{V} + \int p(x) dx = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Воспользовавшись произволом в выборе функции $V(x)$, возьмем постоянную $C_1 = 0$ и получим $\int V^{-1} dV + \int p(x) dx = 0$. (Если бы мы сохранили C_1 в наших формулах, а не взяли $C_1 = 0$, то, как легко проверить, это бы не повлияло на конечный результат.) Окончательно имеем $\ln V + \int p(x) dx = 0$ или $\ln V = -\int p(x) dx$. Отсюда легко получить искомую функцию $V(x)$:

$$V(x) = \exp \left(-\int p(x) dx \right). \quad (15.17)$$

Вернемся к соотношению (15.16). Подставим в него вместо V найденную функцию $V(x)$ из (15.17). Тогда в левой части (15.16) сумма

в скобках обращается в нуль, и получаем соотношение $U'_x V(x) = q(x)$. Найдем из последнего соотношения производную $U'_x = q(x)/V(x)$ и после интегрирования получим

$$U(x) = \int \frac{q(x)}{V(x)} dx + C.$$

Подставим эту функцию и функцию (15.17) в формулу $y = U(x)V(x)$:

$$y = \left(\int \frac{q(x)}{V(x)} dx + C \right) \cdot V(x). \quad (15.18)$$

Получили решение уравнения (15.15).

Пример. Решить уравнение $y'_x + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$.

Предлагаем решить это уравнение самостоятельно, повторив предыдущие выкладки, в которых $p(x) = 1/x$, $q(x) = \sin x/x$.

§ 15.8. Дифференциальные уравнения высших порядков

Как мы знаем, дифференциальное уравнение высшего порядка имеет вид $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Будем считать, что это уравнение разрешимо относительно производной $y^{(n)}$, и получим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (15.19)$$

Здесь f — известное выражение, содержащее $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, а $y = \varphi(x)$ есть искомая функция. Для последнего уравнения запишем без доказательства теорему существования и единственности его решения.

Теорема 15.2. Если в уравнении (15.19) функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по переменным $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области $(n+1)$ -мерного пространства, причем эта область содержит точку с координатами

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0,$$

то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad y''|_{x=x_0} = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0, \quad (15.20)$$

где $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ — заданные числа.

Условия (15.20) называют начальными условиями для решения уравнения (15.19). Задача об отыскании решения уравнения (15.19), удовлетворяющего начальным условиям (15.20), называется задачей

Коши. Например, для дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ начальные условия (15.20) имеют вид

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad (15.21)$$

Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям (15.21). Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения удовлетворяет первому начальному условию (15.21), то (как и для уравнения первого порядка) это означает, что график функции $y = \varphi(x)$ проходит через точку (x_0, y_0) . Вспомним, что вычисленная в точке $x = x_0$ производная $y' = \varphi'(x)|_{x=x_0}$ равна тангенсу угла α , образованного с осью Ox касательной к линии $y = \varphi(x)$ в ее точке с абсциссой $x = x_0$. Если для этого решения выполняется второе начальное условие (15.21), то $y'|_{x=x_0} = y'_0 = \operatorname{tg} \alpha$. Это означает, что указанная касательная образует с осью Ox угол α , тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$ есть заданное число.

Таким образом, если решение $y = \varphi(x)$ уравнения второго порядка удовлетворяет начальным условиям (15.21), то это означает, что график этого решения проходит через точку (x_0, y_0) , причем в этой точке касательная к графику образует заданный угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$.

Из теоремы вытекает, что дифференциальное уравнение (15.19) имеет бесчисленное множество решений, так как в начальных условиях (15.20) числа, стоящие в правой части, можно изменять и тем самым получать различные решения. В связи с этим приведем ряд определений.

Общим решением уравнения (15.19) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, если:

- эта функция при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ удовлетворяет уравнению (15.19);
- для любых начальных условий (15.20) можно подобрать такие значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, при которых указанная функция удовлетворяет этим начальным условиям.

Если общее решение уравнения (15.19) находится в неявном виде, т. е. в виде соотношения $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, то это соотношение называется *общим интегралом уравнения* (15.19).

Решение, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *частным решением уравнения* (15.19).

График частного решения называется *интегральной кривой уравнения* (15.19).

§ 15.9. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $y''_{xx} = f(x, y, y'_x)$, где $y = \varphi(x)$ — искомая функция. Рассмотрим частные случаи этого уравнения, когда его решение сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка.

1. Пусть уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(x)$, т. е. не содержит явно y и y'_x . Заметив, что $y''_{xx} = (y'_x)'_x$, запишем уравнение в виде $(y'_x)'_x = f(x)$. Отсюда видно, что y'_x есть первообразная для $f(x)$, поэтому $y'_x = \int f(x) dx + C_1$, следовательно,

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Это есть общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

2. Пусть теперь дифференциальное уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(x, y'_x)$, т. е. не содержит явно y . Положим $y'_x = z$, считая z функцией от x , и будем искать эту последнюю функцию. Поскольку $y''_{xx} = z'_x(x)$, то исходное уравнение примет вид $z'_x = f(x, z)$, представляющий собой дифференциальное уравнение первого порядка для функции $z = z(x)$. Решив последнее уравнение, найдем $z = \psi(x, C_1)$, и, следовательно, $y'_x = \psi(x, C_1)$. Отсюда найдем общее решение исходного уравнения $y = \int \psi(x, C_1) dx + C_2$.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y'/x = 0$.

Положим $y'_x = z$, тогда $y''_{xx} = z'_x$. Исходное уравнение примет вид $z'_x + z/x = 0$, т. е. $dz/dx + z/x = 0$ или, после умножения на $z^{-1}dx$, $dz/z + dx/x = 0$. Проинтегрировав, получим $\ln|z| + \ln|x| = C_1$. Заменим произвольную постоянную C_1 на $\ln C_1$ и найдем $|z| = C_1/|x|$. Следовательно, $y' = C_1/x$. Окончательно имеем $y = \int (C_1/x) dx + C_2$, т. е. $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

Здесь мы считали, что $z \neq 0$. При $z = 0$ получим $y'_x = 0$, поэтому $y = C = \text{const}$.

3. Пусть теперь дифференциальное уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(y, y'_x)$, т. е. не содержит явно x . Здесь положим $y'_x = p$, считая p функцией от y , подлежащей определению. Так как аргументом у этой функции является искомая функция от x : $y = \varphi(x)$, то из соотношения $y'_x = p$ получаем $y''_{xx} = p'_y y'_x$, поэтому $y''_{xx} = p'_y p$. Теперь исходное уравнение запишется так: $p'_y p = f(y, p)$. Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка с искомой функцией $p = p(y)$.

Решив его, найдем $p = \psi(y, C_1)$ и получим соотношение $y'_x = \psi(y, C_1)$ или $dy = \psi(y, C_1)dx$, представляющее собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общий интеграл имеет вид $\int \frac{dy}{\psi(y, C_1)} = x + C_2$ и является общим интегралом исходного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $y'' = \frac{(y')^2}{y}$.

Положим $y'_x = p(y)$, тогда $y''_{xx} = p'_y p$. Исходное уравнение примет вид $pp' = p^2/y$. Пусть $p = 0$, тогда $y'_x = 0$, и приходим к решению $y = C$. Если $p \neq 0$, то $p' = p/y$, или $dp/dy = p/y$. Отсюда $dp/p - dy/y = 0$. Проинтегрируем последнее равенство: $\ln |p| - \ln |y| = \ln C_1$, следовательно, $|p| = C_1|y|$. Теперь пришли к уравнению $dy/dx = C_1y$. Разделив переменные и проинтегрировав, получим общий интеграл

$$\ln |y| = C_1x + C_2.$$

§ 15.10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений

Линейным уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad (15.22)$$

где $y = \varphi(x)$ — искомая функция, а $a_0, a_1, \dots, a_n, f(x)$ — заданные функции от x , которые будем считать непрерывными в интервале, в котором рассматривается уравнение; $a_0, a_1, \dots, a_n$ называются *коэффициентами уравнения* (15.22); $f(x)$ называется *правой частью* уравнения. Будем считать, что коэффициент a_0 при старшей производной $y^{(n)}$ нигде в рассматриваемом интервале в нуль не обращается. Поэтому уравнение (15.22) можно почленно поделить на a_0 , после чего коэффициент при $y^{(n)}$ будет равен 1. В связи с этим впредь всегда будем считать, что $a_0 \equiv 1$ всюду в рассматриваемом интервале.

Если правая часть $f(x)$ не равна нулю тождественно в рассматриваемом интервале, то уравнение (15.22) называется *неоднородным* уравнением или *уравнением с правой частью*.

Если всюду в рассматриваемом интервале правая часть $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (15.22) называется *однородным* и имеет вид

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \quad (15.23)$$

Говорят, что частные решения $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ уравнения (15.23) образуют *фундаментальную систему* в некотором интервале, если всюду в этом интервале отличен от нуля *определитель Вронского* (вронсиан)

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Линейные однородные уравнения второго порядка согласно (15.23) имеют вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (15.24)$$

Здесь a_1, a_2 — заданные непрерывные функции от x и $y = \varphi(x)$ — искомая функция.

Теорема 15.3. Если $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ — решения уравнения (15.24), то сумма этих решений $y_1 + y_2$ также является решением этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1, y_2 — решения линейного однородного уравнения (15.24), при их подстановке в уравнение (15.24) получаем тождества, т. е.

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 \equiv 0. \quad (15.25)$$

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 \equiv 0. \quad (15.26)$$

Подставим сумму $y_1 + y_2$ в уравнение (15.24) и получим

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = 0.$$

В левой части учтем, что производная суммы равна сумме производных. Кроме того, соберем по отдельности члены, содержащие y_1 и y_2 . Получим $(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$. Но в левой части суммы в скобках тождественно равны нулю согласно (15.25) и (15.26), т. е. получаем тождество. Это означает, что сумма $y_1 + y_2$ удовлетворяет уравнению (15.24) и, следовательно, является его решением. Теорема доказана.

Теорема 15.4. Если $y_1 = y_1(x)$ — решение уравнения (15.24) и C — некоторая константа, то произведение $C y_1$ тоже является решением этого уравнения.

Теорема доказывается аналогично предыдущей, т. е. подстановкой $C y_1$ в уравнение (15.24).

Пусть даны функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$. Для этих функций вронскиан принимает вид

$$W_1(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Соответственно, частные решения $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ уравнения (15.24) образуют фундаментальную систему в некотором интервале изменения x , если всюду в этом интервале отличен от нуля определитель Вронского для этих решений.

Теорема 15.5. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ суть частные решения уравнения (15.24), образующие фундаментальную систему в некотором интервале изменения x , то в этом интервале общее решение уравнения (15.24) определяется формулой

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (15.27)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, надо установить (согласно определению общего решения) два факта:

- показать, что функция (15.27) при любых значениях C_1, C_2 удовлетворяет уравнению (15.24);
- установить, что для любых начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0 \quad (15.28)$$

можно подобрать такие значения постоянных C_1, C_2 , при которых функция (15.27) будет удовлетворять этим начальным условиям.

Здесь x_0, y_0, y'_0 — заданные числа. Будем считать, что x_0 лежит в интервале, в котором ищется решение и определитель Вронского не равен нулю, т. е.

$$W_1(y_1, y_2)|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.29)$$

Так как y_1 является решением уравнения (15.24), то произведение $C_1 y_1$, согласно теореме 15.3, также является решением этого уравнения. Аналогично, произведение $C_2 y_2$ является решением уравнения (15.24). Но тогда по теореме 15.3 их сумма $C_1 y_1 + C_2 y_2$ также является решением уравнения (15.24). Итак, функция (15.27) всегда является решением уравнения (15.24).

Возьмем теперь производную $y' = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x)$ функции (15.27) и потребуем, чтобы эта производная и функция (15.27) удовлетворяли начальным условиям (15.28), т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0). \end{cases} \quad (15.30)$$

Мы считаем, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — известные частные решения, поэтому $y_1(x_0), y_2(x_0), y'_1(x_0), y'_2(x_0)$ — известные числа. Таким образом, в соотношениях (15.30) все величины, кроме C_1 и C_2 , — известные числа, поэтому (15.30) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_1 и C_2 . Определитель этой системы есть определитель Вронского (15.29), вычисленный в точке x_0 , и он не равен нулю. Следовательно, система (15.30) имеет единственное решение.

Решив эту систему, найдем значения постоянных C_1, C_2 . Подставив эти найденные значения в (15.27), определим решение, которое по построению удовлетворяет начальным условиям (15.28). Теорема доказана.

Для уравнения (15.23) справедливы теоремы 15.3 и 15.4, сформулированные и доказанные выше для случая уравнений второго порядка. Для случая линейных однородных уравнений n -го порядка эти теоремы формулируются и доказываются аналогично.

Теорема 15.6 (аналог теоремы 15.5). *Если $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ суть частные решения уравнения (15.23), образующие фундаментальную систему в некотором интервале, то в этом интервале общее решение уравнения (15.23) определяется формулой*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (15.31)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Теорема доказывается аналогично теореме 15.5. Предлагаем провести доказательство самостоятельно.

§ 15.11. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (15.32)$$

в котором p, q — действительные числа. Согласно теореме 15.5 общее решение уравнения (15.32) определяется формулой $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные; $y_1(x), y_2(x)$ — частные решения уравнения (15.32), образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале. Таким образом, задача сводится к нахождению этих частных решений. Будем искать функции y_1 и y_2 в виде

$$y = e^{kx}, \quad (15.33)$$

где k — постоянная величина. Подберем эту величину так, чтобы функция (15.33) была решением уравнения (15.32). Возьмем производные от функции (15.33): $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Потребуем, чтобы функция (15.33) была решением уравнения (15.32). Подставив эту функцию в (15.32), получим $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, или

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0. \quad (15.34)$$

Но $e^{kx} \neq 0$ всюду на действительной оси, так что на эту величину уравнение (15.34) можно сократить, и мы получим

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (15.35)$$

Если k есть корень квадратного уравнения (15.35), то имеет место соотношение (15.34). Поэтому функция (15.33) удовлетворяет уравнению (15.32), т. е. является его решением. Таким образом, нахождение решения вида (15.33) уравнения (15.32) сводится к отысканию корней квадратного уравнения (15.35). Это уравнение называется *характеристическим уравнением* по отношению к дифференциальному уравнению (15.32).

Найдем корни характеристического уравнения (15.35):

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (15.36)$$

Далее будем различать три случая.

Случай 1. Корни (15.36) характеристического уравнения (15.35) действительные и различные, т. е. $k_1 \neq k_2$ (при этом $p^2/4 > q$) Эти корни подставим вместо k в функцию (15.33) и получим два частных решения уравнения (15.32):

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}. \quad (15.37)$$

Запишем определитель Вронского для этих найденных частных решений:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} e^{k_2 x} (k_2 - k_1).$$

Этот определитель для любого x из интервала $(-\infty, +\infty)$ не равен нулю, так как $e^{k_1 x} \neq 0$, $e^{k_2 x} \neq 0$, $k_2 - k_1 \neq 0$.

Итак, частные решения y_1 , y_2 , определенные в (15.37) для уравнения (15.32), образуют фундаментальную систему всюду в интервале $(-\infty, +\infty)$, поэтому в этом интервале общее решение уравнения (15.32) будет иметь вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (15.38)$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Этому уравнению отвечает характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$, корни которого $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. По формуле (15.38) записываем общее решение рассматриваемого уравнения $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Случай 2. Корни характеристического уравнения (15.35) действительны и равны ($k_1 = k_2$).

В этом случае в формулах (15.36) для корней характеристического уравнения обязательно $p^2/4 - q = 0$, так как в противном случае корни k_1 и k_2 не будут равны. При этом очевидно, что $k_1 = -p/2$, следовательно,

$$2k_1 + p = 0. \quad (15.39)$$

Кроме того, учтем, что k_1 — это корень уравнения (15.35):

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0. \quad (15.40)$$

Подставив найденный корень $k_1 = k_2$ вместо k в формулу (15.33), найдем частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ уравнения (15.32).

Для построения общего решения исходного уравнения (15.32) нужно знать еще одно частное решение. Это второе частное решение y_2 будем искать в виде произведения первого найденного частного решения и функции $U(x)$, которую нужно подобрать так, чтобы функция y_2 , будучи решением уравнения (15.32), вместе с функцией $y_1 = e^{k_1 x}$ образовала фундаментальную систему.

Потребуем, чтобы функция $y_2 = U(x)e^{k_1 x}$ была решением дифференциального уравнения (15.32), т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$U''e^{k_1 x} + 2k_1 U'e^{k_1 x} + k_1^2 Ue^{k_1 x} + p(U'e^{k_1 x} + k_1 Ue^{k_1 x}) + qUe^{k_1 x} = 0.$$

Это соотношение разделим на $e^{k_1 x} \neq 0$ и запишем его так:

$$U'' + U'(2k_1 + p) + U(k_1^2 + pk_1 + q) = 0.$$

В левой части суммы в скобках, согласно формулам (15.39) и (15.40), равны нулю, следовательно, $U''_{xx} = 0$. Отсюда $U'_x = \int 0 dx = A = \text{const.}$

Далее, $U = \int A dx = Ax + B$, где $B = \text{const.}$ Таким образом, $y_2 = (Ax + B)e^{k_1 x}$. Положим $A = 1$, $B = 0$, тогда $y_2 = x \exp(k_1 x)$. Нетрудно показать, что при этом функции y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему всюду в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. определитель Вронского для них отличен от нуля всюду в этом интервале. Общее решение уравнения (15.32) будет иметь вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}. \quad (15.41)$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корни этого уравнения равны $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2$. По формуле (15.41) находим общее решение рассматриваемого уравнения $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Случай 3. Корни характеристического уравнения (15.35) — комплексные числа. Это означает, что $p^2/4 - q < 0$. Обозначим $p^2/4 - q = -\beta^2$, $-p/2 = \alpha$. Тогда $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Подставив найденные корни k_1 , k_2 вместо k в (15.33), получим два частных решения уравнения (15.32): $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x+i\beta x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x-i\beta x}$. Используя формулу (10.9) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, запишем эти решения так:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (15.42)$$

Мы нашли два частных решения уравнения (15.32), являющиеся комплексными функциями действительного аргумента, но они не подходят, так как мы ищем действительные функции. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 15.7. *Если комплексная функция действительного аргумента $U(x) + iV(x)$ ($U(x)$, $V(x)$ — действительные функции) является решением уравнения (15.32), то ее действительная $U(x)$ и мнимая $V(x)$ части также являются решениями этого уравнения.*

Доказательство. Функция $U(x) + iV(x)$ является решением уравнения (15.32), т. е. выполняется соотношение

$$(U + iV)'' + p(U + iV)' + q(U + iV) = 0.$$

Учитывая, что $(U + iV)' = U' + iV'$, $(U + iV)'' = U'' + iV''$ и собрав отдельно члены, содержащие U , и члены, содержащие V , получим $(U'' + pU' + qU) + i(V'' + pV' + qV) = 0$. Но если комплексная величина равна нулю, то равны нулю отдельно ее мнимая и действительная части, поэтому $U'' + pU' + qU = 0$ и $V'' + pV' + qV = 0$. Эти соотношения означают, что $U(x)$ и $V(x)$ являются решениями (15.32). Теорема доказана.

По доказанной теореме действительная и мнимая части функций (15.42) — частных решений уравнения (15.32) — являются решениями этого уравнения. Итак, $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ являются частными решениями уравнения (15.32). Легко проверить, что определитель Вронского для этих решений отличен от нуля для всех x из интервала $(-\infty, +\infty)$, т. е. во всем интервале эти решения образуют фундаментальную систему. Общее решение уравнения (15.32) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (15.43)$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Ему отвечает характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$. Корни этого характеристического уравнения равны $k_{1,2} = 2 \pm 3i$, т. е. $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Формула (15.43) дает

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.$$

§ 15.12. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (15.44)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные действительные числа, называется *линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными коэф-*

фициентами. Общее решение этого уравнения определяется формулой (15.31): $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — частные решения уравнения (15.44), образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале, т.е. в этом интервале всюду отличен от нуля определитель Вронского для этих n частных решений. Как и в случае уравнения второго порядка (15.32), эти частные решения будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k — постоянная, которую нужно подобрать так, чтобы функция e^{kx} была решением уравнения (15.44). Подставив эту функцию в уравнение (15.44), как и в случае уравнения второго порядка (15.32), для нахождения величины k получим характеристическое уравнение для уравнения (15.44):

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (15.45)$$

Это алгебраическое уравнение n -й степени для нахождения k . Из алгебры известно, что такое уравнение имеет n решений (корней). Эти корни будут действительными (простыми или кратными) или комплексными (простыми или кратными). Если комплексное число $\alpha + i\beta$ является корнем, то сопряженное число $\alpha - i\beta$ тоже является корнем, так как уравнение (15.45) имеет действительные коэффициенты. Иначе говоря, комплексные корни обязательно входят парами (как и в случае квадратного уравнения).

Каждому простому действительному корню k характеристического уравнения (15.45) отвечает одно решение e^{kx} уравнения (15.44).

Каждому действительному корню k кратности r характеристического уравнения (15.45) отвечают r решений уравнения (15.44) вида e^{kx} , $x e^{kx}$, $x^2 e^{kx}$, $\dots$, $x^{r-1} e^{kx}$.

Каждой простой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ характеристического уравнения (15.45) отвечает одна пара частных решений уравнения (15.44) $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности μ характеристического уравнения (15.45) отвечают μ пар решений уравнения (15.44):

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x} \cos \beta x, & e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x, & x e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ \dots & \dots \\ x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{array}$$

Всего частных решений уравнения (15.44) будет ровно n . Можно показать (принимается без доказательства), что эти n частных решений образуют фундаментальную систему всюду в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Общее решение уравнения (15.44) определяется формулой (15.31), в которой вместо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ нужно подставить указанные частные решения.

Пример. Дано уравнение пятого порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0. \quad (15.46)$$

Его характеристическое уравнение $k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0$. Это уравнение запишем так: $(k + 1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$, или

$$(k + 1)(k^2 + 1)^2 = 0. \quad (15.47)$$

Находим корни: $k_1 = -1$ (это простой действительный корень, он отвечает первому множителю левой части уравнения (15.47)) и $k_{2,3} = \pm i$. Корни $k_{2,3}$ — пара комплексно сопряженных. Их получили, приравняв нулю второй сомножитель левой части уравнения (15.47). Они имеют кратность 2, так как $(k^2 + 1)$ стоит во второй степени, т.е. пара корней повторяется дважды. Первому корню отвечает одно частное решение $y_1 = e^{-x}$. Пары корней $k_{2,3}$ отвечают две пары частных решений уравнения (15.46): $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = x \cos x$, $y_5 = x \sin x$. Общее решение уравнения (15.46) согласно (15.31) запишется так: $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x$.

§ 15.13. Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Линейное неоднородное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (15.48)$$

Здесь $a_1, a_2, f(x)$ — заданные непрерывные функции, а $y = \varphi(x)$ — искомая функция. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (15.49)$$

Как известно (см. теорему 15.5), общее решение $\tilde{y}$ этого уравнения определяется формулой

$$\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (15.50)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x)$ — частные решения однородного уравнения, образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале изменения x , в котором ищется решение. Это означает, что в указанном интервале для этих частных решений всюду отличен от нуля определитель Вронского:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.51)$$

Теорема 15.8. *Общее решение y неоднородного уравнения (15.48) представляется в виде суммы какого-либо частного решения $y^* = y^*(x)$ этого уравнения и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (15.49), т. е.*

$$y = y^* + \tilde{y}, \quad (15.52)$$

или, согласно (15.50),

$$y = y^*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (15.53)$$

Доказательство. Согласно определению общего решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо установить два факта.

1. Сумма $y^* + \tilde{y}$ удовлетворяет уравнению (15.48) при любых значениях входящих в нее постоянных C_1, C_2 .
2. Для любых начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0 \quad (15.54)$$

в формуле (15.53) можно подобрать такие значения постоянных C_1, C_2 , при которых функция (15.53) будет удовлетворять этим начальным условиям.

Докажем первый факт. Подставим указанную сумму в (15.48) (вместо y) и получим $(y^* + \tilde{y})'' + a_1(y^* + \tilde{y})' + a_2(y^* + \tilde{y}) = f(x)$. Теперь учтем, что производная от суммы равна сумме производных, и в левой части соберем отдельно слагаемые, содержащие y^* , и отдельно слагаемые, содержащие $\tilde{y}$. Получим

$$(y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) + (\tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_2 \tilde{y}) = f(x).$$

Но $\tilde{y}$ — общее решение уравнения (15.49), поэтому вторая сумма в скобках равна нулю. Далее, y^* есть решение неоднородного уравнения (15.48), поэтому первая сумма в скобках равна $f(x)$. Таким образом, получили тождество. Это означает, что сумма (15.52) удовлетворяет уравнению (15.48), т. е. является его решением.

Докажем теперь второй факт. В начальных условиях (15.54), как всегда, x_0, y_0, y'_0 — заданные числа. Кроме того, мы должны считать, что x_0 лежит в интервале, в котором определитель Вронского не равен нулю, так как используем формулу (15.53), в которой для y_1, y_2 считается выполняющимся условие (15.51). Это означает, что

$$W(y_1, y_2)|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.55)$$

Найдем производную выражения (15.53) и потребуем, чтобы функция (15.53) и ее производная удовлетворяли начальным условиям (15.54), т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} y^*(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ y^{*'}(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases} \quad (15.56)$$

Мы считаем, что в формуле (15.53) $y^*(x)$, частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (15.49) нам известны. Значит, их значения, а также значения производных в точке x_0 суть известные числа, поэтому в (15.56) все величины, кроме C_1 , C_2 известны. Таким образом, соотношение (15.56) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений, которые запишем так:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y^{*'}(x_0). \end{cases} \quad (15.57)$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского (15.55), который отличен от нуля, поэтому система (15.57) имеет единственное решение. Решив ее, найдем значения постоянных C_1 , C_2 . Подставив эти значения в (15.53), получим решение, по построению удовлетворяющее начальным условиям (15.54). Теорема доказана.

§ 15.14. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка

Согласно теореме 15.8 для нахождения общего решения уравнения (15.48) надо знать какое-либо частное решение этого уравнения. Рассмотрим один из методов построения этого частного решения.

Будем считать, что общее решение соответствующего однородного уравнения найдено и определяется формулой (15.50), т. е. нам известны частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (15.49), образующие фундаментальную систему в некотором интервале. Частное решение y^* неоднородного уравнения (15.48) также будем искать в виде суммы (15.50), только теперь, в отличие от предыдущего, будем считать, что C_1 , C_2 являются не постоянными, а искомыми функциями от x . Таким образом, y^* будем искать в виде

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (15.58)$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — новые искомые функции. Одну из них можно выбрать произвольно или наложить на нее дополнительное требование по нашему усмотрению. Вторую функцию нужно выбрать так, чтобы функция (15.58) была решением неоднородного уравнения (15.48).

Возьмем производную от функции (15.58), учитывая, что в правой части стоят произведения: $y^{*'} = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'$. Потребуем, чтобы C_1' , C_2' удовлетворяли условию

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \quad (15.59)$$

Тогда предыдущее соотношение примет вид

$$y^{*'} = C_1 y_1' + C_2 y_2'. \quad (15.60)$$

Возьмем еще раз производную по x :

$$y^{*''} = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''. \quad (15.61)$$

Теперь потребуем, чтобы функция y^* , определяемая формулой (15.58), была решением неоднородного уравнения (15.48). Подставим в (15.48) вместо y , y' , y'' выражения (15.58), (15.60), (15.61) соответственно:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f(x).$$

Поскольку y_1 и y_2 — решения однородного уравнения (15.49), то суммы в скобках равны нулю; следовательно, $C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$. Запишем это соотношение вместе с условием (15.59) и получим

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases} \quad (15.62)$$

Здесь, как уже отмечалось, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $f(x)$, y_1 , y_2 — известные функции. Соотношение (15.62) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений для нахождения двух неизвестных C_1' , C_2' . Определитель этой системы есть определитель Вронского (15.51), и он отличен от нуля. Значит, система (15.62) имеет единственное решение. Решив ее, найдем $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$. С помощью интегрирования получим

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные. Так как ищем частное решение y^* , то постоянные можно выбрать произвольно. Впредь всегда будем считать их равными нулю. Подставив найденные выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (15.58), найдем искомое частное решение y^* неоднородного уравнения (15.48).

Пример. Дано неоднородное уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \quad (15.63)$$

Ему отвечает однородное уравнение

$$y'' + y = 0. \quad (15.64)$$

Последнему уравнению соответствует характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Его корни равны $k_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i$. Соответственно, общее решение уравнения (15.64) имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (15.65)$$

Итак, частные решения однородного уравнения (15.64), образующие фундаментальную систему в интервале $(-\infty + \infty)$, будут следующими: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Частное решение y^* неоднородного уравнения (15.63) ищем в виде (15.58), т. е. в виде

$$y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \quad (15.66)$$

Поступив, как и выше, для нахождения C'_1 и C'_2 получим систему (15.62), которая в условиях примера запишется так:

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0, \\ C'_1(-\sin x) + C'_2 \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases} \quad (15.67)$$

Первое уравнение умножим на $\sin x$, второе — на $\cos x$ и сложим их почленно. В итоге имеем $C'_2 = 1$. Тогда из первого уравнения (15.67) найдем $C'_1 = -\sin x / \cos x$ и, проинтегрировав, получим $C_2 = \int dx = x$, $C_1 = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x|$. Подставим найденные функции в формулу (15.66), получим $y^* = (\ln |\cos x|) \cos x + x \sin x$. Общее решение уравнения (15.63) определится как сумма по формуле (15.52):

$$y = (\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x.$$

При нахождении частного решения уравнения (15.48) часто бывает полезной

Теорема 15.9. Дано уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x). \quad (15.68)$$

Пусть $y_1^* = y_1^*(x)$ есть решение уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$, а $y_2^* = y_2^*(x)$ — решение уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$. Тогда сумма $y_1^* + y_2^*$ есть решение уравнения (15.68).

Теорема доказывается прямой подстановкой $y_1^* + y_2^*$ в (15.68).

§ 15.15. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка

Названные уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (15.69)$$

где $a_1, \dots, a_n$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции от x в интервале, в котором ищется решение. Как всегда, $y = \varphi(x)$ — искомая функция. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (15.70)$$

Как известно (см. теорему 15.6), общее решение этого уравнения

$$\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (15.71)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — частные решения однородного уравнения (15.70), образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале. Это означает, что всюду в этом интервале отличен от нуля определитель Вронского для этих частных решений:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.72)$$

Для неоднородного уравнения (15.69) справедлива теорема о структуре его общего решения, аналогичная теореме 15.8.

Теорема 15.10. *Общее решение $y(x)$ неоднородного уравнения (15.69) представляется в виде суммы какого-либо его частного решения $y^* = y^*(x)$ и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (15.70), т.е. $y = y^* + \tilde{y}$ или, с учетом (15.71), $y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$.*

Теорема доказывается так же, как в случае уравнения второго порядка. Для нахождения частного решения y^* неоднородного уравнения (15.69) применим метод вариации произвольных постоянных, предположив, что указанные выше частные решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ однородного уравнения (15.70) известны, а y^* имеет тот же вид, что $\tilde{y}$ в формуле (15.71), только теперь $C_1, C_2, \dots, C_n$ считаются не постоянными, а искомыми функциями от x . Итак, ищем y^* в виде

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n, \quad (15.73)$$

где $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ — новые искомые функции. Для определения их производных выпишем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0, \\ \dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \quad (15.74)$$

(выполнения первых $(n - 1)$ соотношений в (15.74) потребуем сами, а последнее соотношение получится из требования, чтобы функция (15.73) была решением неоднородного уравнения (15.69). Соотношение (15.74) представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$. Определитель этой системы есть определитель Вронского (15.72) и отличен от нуля в рассматриваемом интервале, поэтому система (15.74) имеет единственное решение. Решив ее, найдем $C'_1 = \varphi_1(x)$, $C'_2 = \varphi_2(x), \dots, C'_n = \varphi_n(x)$. Проинтегрировав эти равенства, получим

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx, \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx, \quad \dots, \quad C_n = \int \varphi_n(x) dx,$$

причем постоянные интегрирования всюду можно взять равными нулю. Подставив найденные функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ в формулу (15.73), получим искомое частное решение y^* .

§ 15.16. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Так называются уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (15.75)$$

где $a_1, \dots, a_n$ — заданные действительные числа, а $f(x)$ — заданная непрерывная функция. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (15.76)$$

решение которого, как известно (§ 15.12), сводится к нахождению корней соответствующего характеристического уравнения

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (15.77)$$

Мы знаем, что общее решение $\tilde{y}$ однородного уравнения (15.76) определяется формулой

$$\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (15.78)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — частные решения уравнения (15.76), образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале. Для уравнения (15.76) с постоянными коэффициентами эти n частных решений можно записать сразу, если известны корни характеристического уравнения (15.77). Мы знаем также, что общее решение y неоднородного уравнения (15.75) определяется как сумма общего

решения $\tilde{y}$ однородного уравнения (15.76) и какого-либо частного решения y^* неоднородного уравнения (15.75). Для нахождения частного решения y^* можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Но при больших значениях n этот метод обычно приводит к громоздким вычислениям. Поэтому в тех случаях, когда правая часть $f(x)$ уравнения (15.75) имеет *специальный* вид, оказывается проще воспользоваться другим методом нахождения y^* , а именно, методом неопределенных коэффициентов, который описан ниже. Рассмотрим два случая специального вида правой части $f(x)$ неоднородного уравнения (15.75).

Случай 1. Пусть $f(x) = P_s(x)e^{\alpha x}$, где α — заданное действительное число, $P_s(x)$ — известный многочлен степени s . Здесь в свою очередь возможны два подслучая:

- число α не является корнем характеристического уравнения (15.77); тогда частное решение y^* неоднородного уравнения (15.75) ищется в том же виде $y^* = M_s(x)e^{\alpha x}$, что и правая часть уравнения (15.75); здесь $M_s(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s$ — многочлен степени s , где $A_0, A_1, \dots, A_s$ — коэффициенты многочлена, подлежащие определению;
- α есть корень кратности μ характеристического уравнения (15.77), y^* в этом случае ищем в виде $y^* = x^\mu M_s(x)e^{\alpha x}$, где $M_s(x)$ — указанный выше многочлен с неопределенными коэффициентами.

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_s$ потребуем, чтобы y^* указанного вида было решением неоднородного уравнения (15.75). Эту функцию и ее производные первого, второго, ..., s -го порядков подставим в (15.75) и потребуем, чтобы уравнение при этом стало тождеством. Все слагаемые в левой части полученного соотношения содержат множитель $e^{\alpha x} \neq 0$, на который это соотношение сократим. Тогда в левой части получится сумма, содержащая различные степени x . Приведя подобные члены, расположим эту сумму по степеням x и в левой части получим многочлен. Его коэффициенты будут содержать искомые числа $A_0, A_1, \dots, A_s$. Этот многочлен тождественно равен $P_s(x)$ — многочлену, стоящему в правой части полученного соотношения. Так как это соотношение должно выполняться при всех x , то коэффициенты многочленов, стоящих слева и справа при одинаковых степенях x , должны быть равны. Приравняв коэффициенты, получим уравнения для определения $A_0, A_1, \dots, A_s$. Этих уравнений будет столько же, сколько имеется неизвестных.

Случай 2. Правая часть имеет вид

$$f(x) = P_s(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где α, β — заданные действительные числа, а $P_s(x), Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней s и m с заданными коэффициентами. Здесь также будем различать два подслучая:

- числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (15.77); частное решение y^* неоднородного уравнения (15.75) ищем в виде $y^* = U_r(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_r(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, где $U_r(x), V_r(x)$ — многочлены степени r с неопределенными коэффициентами, r — наибольшее из чисел s и m ; всего неопределенных коэффициентов будет $2(r+1)$;
- числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения (15.77) кратности μ ; в этом случае y^* ищем в виде $y^* = x^\mu [U_r(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_r(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]$, где $U_r(x), V_r(x)$ означают то же, что и выше.

Для нахождения неопределенных коэффициентов потребуем, чтобы записанное выражение для y^* было решением уравнения (15.75). Найдем производные от y^* и подставим их вместе с y^* в уравнение (15.75). Полученное соотношение сократим на $e^{\alpha x}$. В левой части выражение при $\cos \beta x$ расположим по степеням x в виде многочлена, коэффициенты которого содержат искомые коэффициенты. Этот многочлен должен быть тождественно равен $P_s(x)$. Аналогично многочлен, получаемый в левой части при $\sin \beta x$, должен быть тождественно равен $Q_m(x)$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, стоящих слева и справа при $\cos \beta x$, а затем при $\sin \beta x$, получим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Найдя из них искомые коэффициенты, тем самым получим искомое решение y^* .

Сказанное выше остается в силе и в том случае, когда правая часть не содержит $P_s(x)$ или $Q_m(x)$, т. е. $P_s(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

Пример. Решить уравнение $y^{(4)} - y = x^3 + 1$.

Этому уравнению отвечает однородное уравнение $y^{(4)} - y = 0$, которому в свою очередь соответствует характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$. Корнями последнего будут $k_1 = -1, k_2 = 1, k_{3,4} = \pm i$. Таким образом, общее решение однородного уравнения $\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Правая часть рассматриваемого уравнения имеет вид $P_3(x)e^{0 \cdot x}$, причем $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение y^* неоднородного уравнения ищем в виде $y^* = M_3(x)$, а именно, $y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$. Имеем $y^{*'} = 3A_0 x^2 + 2A_1 x + A_2, y^{*''} = 6A_0 x + 2A_1, y^{*'''} = 6A_0, y^{*(4)} = 0$. Подставим функцию y^* и ее производные в исходное уравнение и получим $-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1$. Коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x должны быть равны, поэтому $A_0 = -1, A_1 = 0,$

Пример. Возьмем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 3y_2 + 2x. \end{cases} \quad (15.84)$$

От нее перейдем к другой системе, которая не будет содержать $y_2'(x)$. Для этого первое уравнение в (15.84) продифференцируем по x : $y_1'' = y_1' + y_2' + 1$. В правую часть полученного уравнения вместо y_1' , y_2' подставим выражения из правых частей системы (15.84): $y_1'' = (y_1 + y_2 + x) + (-4y_1 - 3y_2 + 2x) + 1$. Получим уравнение $y_1'' = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1$ и выпишем его вместе с первым уравнением (15.84):

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + x, \\ y_1'' = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1. \end{cases} \quad (15.85)$$

Итак, от системы (15.84) перешли к системе (15.85), не содержащей y_2' , поэтому из нее можно исключить y_2 . С этой целью из первого уравнения выразим y_2 :

$$y_2 = y_1' - y_1 - x. \quad (15.86)$$

Это выражение подставим во второе уравнение (15.85): $y_1'' + 2y_1' + y_1 = 5x + 1$.

Получили дифференциальное уравнение для нахождения $y_1(x)$. Это есть линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Его решением будет функция $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 5x - 9$. Чтобы найти y_2 , найдем производную от y_1 , подставим эту производную и саму функцию y_1 в правую часть формулы (15.86) и получим

$$y_2 = (-2C_1 + C_2)e^{-x} - 2C_2 x e^{-x} - 6x + 14.$$

Глава 16

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 16.1. Сходимость и сумма ряда

Дана бесконечная последовательность чисел $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$. *Числовым рядом* называется выражение

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (16.1)$$

содержащее бесконечное число слагаемых. Этот ряд коротко записывают так: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Числа $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ называют *членами ряда*.

Сумма первых n членов ряда называется *n -й частичной суммой* этого ряда и обозначается

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (16.2)$$

Запишем частичные суммы: $S_1 = U_1$, $S_2 = U_1 + U_2$, $S_3 = U_1 + U_2 + U_3$, $S_{n-1} = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$, $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$. Очевидно, что

$$S_n = S_{n-1} + U_n. \quad (16.3)$$

Если у n -й частичной суммы ряда (16.1) существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (16.1) *сходится* и имеет сумму, равную S . Если конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, то говорят, что ряд (16.1) *расходится* и суммы не имеет.

Пример. Возьмем ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$, где a, q — заданные числа. Это выражение есть геометрическая прогрессия с первым членом a и знаменателем q . Будем считать, что $a \neq 0$. Запишем n -ю частичную сумму этого ряда $S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$. Умножив обе части последней формулы на $1 - q$ при $q \neq 1$, получим $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$. Запишем эту формулу так:

$$S_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}. \quad (16.4)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $|q| < 1$, тогда $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; поэтому, взяв в формуле (16.4) предел при $n \rightarrow \infty$ и замечая, что предел правой части равен разности пределов слагаемых, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aq^n}{1-q}$. Второй предел справа равен нулю, так как $q^n \rightarrow 0$, а первый предел как предел постоянной ей же и равен. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Это означает, что геометрическая прогрессия представляет собой сходящийся ряд и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. Итак, если абсолютная величина знаменателя геометрической прогрессии меньше 1, то прогрессия сходится.

2. Пусть $|q| > 1$, тогда $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Как видно из (16.4), при этом $S_n \rightarrow \infty$, так как второе слагаемое правой части (16.4) стремится к бесконечности. Итак, $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и ряд расходится.

3. Пусть теперь $q = 1$, тогда ряд примет вид $a + a + \dots + a + \dots$, и n -я частичная сумма этого ряда равна $S_n = a + a + \dots + a = na$, поэтому при $n \rightarrow \infty$ имеем $S_n \rightarrow \infty$, т. е. ряд расходится.

4. Пусть $q = -1$, тогда рассматриваемый ряд примет вид $a - a + a - a + \dots + a - \dots$, и

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ a & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Таким образом, с увеличением n сумма S_n принимает значения, то равные нулю, то равные a , и ни к какому пределу при $n \rightarrow \infty$ не стремится. Значит, предел суммы S_n при $n \rightarrow \infty$ не существует, следовательно, ряд расходится.

§ 16.2. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости

Справедлива

Теорема 16.1. *Если сходится данный числовой ряд, то сходится и ряд, полученный из него отбрасыванием любого конечного числа первых членов, и наоборот, из сходимости последнего ряда вытекает сходимость первого. Кроме того, указанные ряды расходятся также одновременно.*

Доказательство. В ряде (16.1) положим $n = N + m$, где все числа являются целыми и положительными, и выделим в нем первые N членов:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N + U_{N+1} + U_{N+2} + \dots + U_n + \dots \quad (16.5)$$

Теперь запишем ряд, полученный из последнего отбрасыванием первых N членов:

$$U_{N+1} + U_{N+2} + \dots + U_n + \dots \quad (16.6)$$

Запишем две частичные суммы ряда (16.1):

$$S_N = U_1 + U_2 + \dots + U_N,$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_N + U_{N+1} + U_{N+2} + \dots + U_n;$$

m -я частичная сумма ряда (16.6) равна $\tilde{S}_m = U_{N+1} + U_{N+2} + \dots + U_n$. Как видно из выписанных формул,

$$S_n = S_N + \tilde{S}_m. \quad (16.7)$$

Пусть N — фиксированное число. Тогда S_N — фиксированная величина, и $n \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. В (16.7) перейдем к пределу при последнем условии, если существует конечный предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_m$, и учтем, что предел правой части равен сумме пределов, а предел постоянной S_N равен ей самой, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_N + \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_m. \quad (16.8)$$

К этому же соотношению (16.8) мы придем, предположив, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Отсюда следует, что если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (т. е. сходится ряд (16.5)), то существует $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}_m$ (т. е. сходится ряд (16.6)), и наоборот, из существования последнего конечного предела вытекает существование первого конечного предела, иначе говоря, из сходимости ряда (16.6) следует сходимость ряда (16.5). Из (16.7) видно также, что если одна из величин S_n , $\tilde{S}_m$ не имеет конечного предела, то другая также его не имеет. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что при исследовании сходимости числового ряда можно не учитывать, а просто отбрасывать любое конечное число первых его членов.

Теорема 16.2. Если ряд (16.1) сходится и имеет сумму, равную S , то ряд

$$cU_1 + cU_2 + \dots + cU_n + \dots, \quad (16.9)$$

где c — заданное число, также сходится и имеет сумму, равную cS .

Доказательство. Запишем n -е частичные суммы рядов (16.1) и (16.9): $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, $\sigma_n = cU_1 + cU_2 + \dots + cU_n = cS_n$. По условию теоремы ряд (16.1) сходится, т. е. существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Но тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (cS_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS$, т. е. существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = cS$. Это означает, что ряд (16.9) сходится и имеет сумму, равную cS . Теорема доказана.

Теорема 16.3. Если ряды

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$

сходятся и имеют суммы, равные соответственно S и $\tilde{S}$, то ряды

$$(U_1 + V_1) + (U_2 + V_2) + \dots + (U_n + V_n) + \dots,$$

$$(U_1 - V_1) + (U_2 - V_2) + \dots + (U_n - V_n) + \dots$$

также сходятся и имеют суммы, равные соответственно $S + \tilde{S}$ и $S - \tilde{S}$.

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с предыдущей.

Теорема 16.4 (необходимый признак сходимости). Если ряд (16.1) сходится, то его n -й член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Доказательство. Сходимость ряда (16.1) означает, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. В последней формуле n — величина, принимающая целые значения и стремящаяся к бесконечности. Таким же свойством обладает и $n - 1$, следовательно, в последней формуле n можно заменить на $n - 1$, и тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Последнее соотношение почленно вычтем из предыдущего, учтя, что разность пределов в левой части равна пределу разности, и получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Но согласно (16.3) разность под знаком предела равна U_n . Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. Теорема доказана.

Следствие (достаточный признак расходимости числового ряда). Если n -й член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

В самом деле, если бы этот ряд сходил, то его n -й член стремился бы к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение, обратное утверждению теоремы 16.4, вообще говоря, неверно, т.е. нельзя утверждать без оговорок, что если n -й член ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сходится. Сказанное видно на примере так называемого *гармонического ряда* $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$, n -й член которого $1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но этот ряд расходится, как будет показано в дальнейшем.

§ 16.3. Признаки сравнения рядов

Свойства сходящихся рядов. Даны два ряда с положительными членами

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (16.10)$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (16.11)$$

Запишем их n -е частичные суммы

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n, \quad (16.12)$$

$$\tilde{S}_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (16.13)$$

Как видно из (16.3), $S_n - S_{n-1} = U_n$, но $U_n > 0$, поэтому $S_n > S_{n-1}$. Иначе говоря, каждая последующая частичная сумма ряда (16.10) больше предыдущей. Это означает, что выражение S_n , определяемое формулой (16.12), есть возрастающая функция от n . Ясно, что $\tilde{S}_n$ также является возрастающей функцией от n .

Теорема 16.5. Если для всех $n = 1, 2, \dots$ члены рядов (16.10), (16.11) удовлетворяют условию

$$U_n \leq V_n \quad (16.14)$$

и ряд (16.11) сходится, то ряд (16.10) тоже сходится.

Доказательство. Из формул (16.12), (16.13) с учетом неравенств (16.14) для всех $n = 1, 2, \dots$ получим

$$S_n \leq \tilde{S}_n. \quad (16.15)$$

По условию ряд (16.11) сходится. Значит, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S}$. Но $\tilde{S}_n$ есть возрастающая функция от n . Таким образом, $\tilde{S}_n$ стремится к пределу $\tilde{S}$, возрастая, при этом $\tilde{S}_n$ обязательно остается меньше своего предела. Значит, $\tilde{S}_n < \tilde{S}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. С учетом (16.15) теперь получим $S_n < \tilde{S}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Это означает, что S_n является ограниченной функцией от n . При этом S_n является возрастающей функцией от n . Как известно из теории пределов, любая возрастающая ограниченная функция имеет конечный предел, поэтому существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Это означает, что ряд (16.10) сходится. Теорема доказана.

Пример 1. Возьмем два ряда:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots, \quad (16.16)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots. \quad (16.17)$$

Для всех $n > 2$ имеем $1/n < 1/2$, поэтому $1/n^n < 1/2^n$ для всех $n > 2$. Таким образом, члены ряда (16.16) меньше соответствующих членов ряда (16.17), но последний ряд сходится, так как представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $1/2$. По теореме 16.5 ряд (16.16) также сходится.

Теорема 16.6. Если для всех $n = 1, 2, \dots$ члены рядов (16.10), (16.11) удовлетворяют неравенствам

$$U_n \geq V_n \quad (16.18)$$

и ряд (16.11) расходится, то ряд (16.10) тоже расходится.

Доказательство. Из (16.12), (16.13) с учетом неравенства (16.18) для всех $n = 1, 2, \dots$ получим

$$S_n \geq \tilde{S}_n. \quad (16.19)$$

По условию ряд (16.11) расходится, при этом обязательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \infty$, т.е. является неограниченной функцией от n . В самом деле, если бы величина $\tilde{S}_n$ была ограниченной, то она как возрастающая функция имела бы конечный предел. Теперь из формулы (16.19) видно, что $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Иначе говоря, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Это означает, что ряд (16.10) расходится. Теорема доказана.

Пример 2. Возьмем два ряда:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots, \quad (16.20)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots. \quad (16.21)$$

Так как $\sqrt{n} < n$ для всех $n \geq 2$, то $1/\sqrt{n} > 1/n$ для всех $n \geq 2$. Таким образом, члены ряда (16.20) больше членов ряда (16.21), начиная со второго. При этом ряд (16.21), как отмечалось, расходится; следовательно, согласно теореме 16.6 ряд (16.20) также расходится.

§ 16.4. Признак Даламбера

Теорема 16.7 (признак Даламбера). Если для ряда (16.1) с положительными членами существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l, \quad (16.22)$$

то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

При $l = 1$ теорема ответа не дает.

Доказательство. Обозначим

$$x_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}. \quad (16.23)$$

Тогда выражение (16.22) примет вид $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Рассмотрим первый случай, когда $l < 1$. Возьмем произвольное число q , $l < q < 1$, тогда $q - l > 0$. Так как величина x_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, равный l , то, согласно определению предела x_n при

$n \rightarrow \infty$, найдется такое натуральное число N , что для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|x_n - l| < q - l$. Поскольку любое число не большее своей абсолютной величины, это неравенство можно переписать так: $x_n - l \leq |x_n - l| < q - l$, или $x_n < q$. Отсюда с учетом (16.23) имеем $U_{n+1}/U_n < q$. Умножив последнее неравенство на положительное число U_n , получим, что для всех $n \geq N$ имеет место неравенство $U_{n+1} < qU_n$. Запишем это неравенство для $n = N, N+1, N+2, \dots$, учитывая при этом каждый раз предыдущее неравенство:

$$\begin{cases} U_{N+1} < qU_N, \\ U_{N+2} < qU_{N+1} < q^2U_N, \\ U_{N+3} < qU_{N+2} < q^3U_N, \\ \dots \end{cases} \quad (16.24)$$

Перепишем исходный ряд (16.1), выделив в нем первые N членов:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N + U_{N+1} + U_{N+2} + \dots + U_n + \dots$$

Теперь запишем ряд, полученный из последнего отбрасыванием первых N членов:

$$U_{N+1} + U_{N+2} + U_{N+3} + \dots + U_n + \dots \quad (16.25)$$

Возьмем ряд

$$qU_N + q^2U_N + q^3U_N + \dots \quad (16.26)$$

Он есть геометрическая прогрессия со знаменателем q и сходится, так как $q < 1$. Тогда согласно теореме 16.5 будет сходиться ряд (16.25), так как его члены в силу (16.24) меньше соответствующих членов сходящегося ряда (16.26). Но тогда по теореме 16.1 сходится исходный ряд (16.1), который отличается от сходящегося ряда (16.25) только конечным числом N первых членов.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $l > 1$, тогда согласно определению предела для числа $l - 1 > 0$ найдется такое натуральное число N , что для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|x_n - l| < l - 1$, или, что то же, $|l - x_n| < l - 1$. Значит, $l - x_n \leq |l - x_n| < l - 1$, отсюда следует $x_n > 1$. Теперь с учетом (16.23) имеем $U_{n+1}/U_n > 1$, или $U_{n+1} > U_n$. Это неравенство, как и предыдущее, справедливо для всех $n \geq N$. Отсюда видно, что, начиная с номера N , каждый последующий член ряда (16.1) больше предыдущего. Это означает, что при $n \rightarrow \infty$ величина U_n не стремится к нулю, согласно достаточному признаку расходимости ряд (16.1) расходится. Теорема доказана.

Пример. Дан ряд $5/1 + 5^2/2 + 5^3/3 + \dots + 5^n/n + \dots$. Имеем

$$U_n = \frac{5^n}{n}, \quad U_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5n}{n+1}.$$

Возьмем предел последней дроби, учитывая, что за знак предела можно вынести постоянный множитель 5, а затем раскрыть неопределенность типа ∞/∞ , разделив под знаком предела числитель и знаменатель полученной дроби на n :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 5.$$

Итак, $l = 5 > 1$, поэтому согласно теореме 16.7 ряд расходится.

§ 16.5. Радикальный и интегральный признаки Коши

Теорема 16.8 (радикальный признак Коши). *Если для ряда (16.1) с положительными членами существует конечный предел $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n}$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.*

Теорема доказывается аналогично предыдущей и при $l = 1$ ответа не дает.

Пример 1. Возьмем ряд $\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n + \dots$. Найдем предел

$$\begin{aligned} l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+1/n} = \frac{1}{3} < 1, \end{aligned}$$

следовательно, ряд сходится.

Теорема 16.9 (интегральный признак Коши). *Пусть члены ряда (16.1) положительны и убывают, т.е. $U_1 > U_2 > \dots > U_n > U_{n+1} > \dots$. Пусть $f(x)$ — непрерывная убывающая функция, такая, что*

$$f(1) = U_1, \quad f(2) = U_2, \quad \dots, \quad f(n) = U_n, \quad \dots \quad (16.27)$$

Тогда:

- если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, то сходится ряд (16.1);
- если указанный несобственный интеграл расходится, то ряд (16.1) расходится.

Доказательство. На рис. 16.1 изображен график функции $y = f(x)$. Точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами $1, 2, 3, \dots$

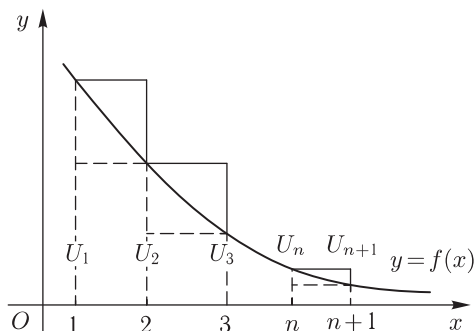


Рис. 16.1

$\dots, n, n+1, \dots$ имеют ординаты, равные соответственно $U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}, \dots$ в силу равенств (16.27). Тогда

$$\int_1^{n+1} f(x) dx = S_{\text{кр. тр.}}, \quad (16.28)$$

где $S_{\text{кр. тр.}}$ — площадь криволинейной трапеции, основанием которой служит отрезок оси Ox от 1 до $n+1$; сверху трапеция ограничена соответствующим участком кривой $y = f(x)$, а с боков — отрезками прямых $x = 1$, $x = n+1$. Ясно, что эта площадь при увеличении n увеличивается, поэтому интеграл (16.28) является возрастающей функцией верхнего переменного предела $n+1$. На интервалах $[1, 2]$, $[2, 3]$, $\dots$, $[n, n+1]$ построим прямоугольники, высоты которых равны соответственно $U_1, U_2, \dots, U_n$. Получим ступенчатую фигуру, площадь которой обозначим S_0 . Эта площадь равна сумме площадей указанных прямоугольников: $S_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Однако сумма в правой части последнего равенства есть S_n — n -я частичная сумма ряда (16.1). Итак,

$$S_0 = S_n. \quad (16.29)$$

На интервалах $[1, 2]$, $[2, 3]$, $\dots$, $[n, n+1]$ как на основаниях построим прямоугольники, высоты которых равны соответственно $U_2, U_3, \dots, U_{n+1}$. Получим ступенчатую фигуру, площадь которой (обозначим ее S_b) равна сумме площадей n прямоугольников с основаниями, равными 1: $S_b = U_2 + U_3 + \dots + U_{n+1}$. Легко видеть, что

$$S_b = S_{n+1} - U_1. \quad (16.30)$$

Как видно из рис. 16.1 $S_b < S_{\text{кр. тр.}} < S_0$. С учетом (16.28)–(16.30) для площадей получим

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx, \quad (16.31)$$

$$S_{n+1} - U_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx, \quad \text{или} \quad S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x) dx + U_1.$$

Так как (16.1) является рядом с положительными членами, то n -я частичная сумма S_n этого ряда есть возрастающая функция от n и поэтому $S_n < S_{n+1}$. Отсюда и из предыдущего неравенства будем иметь

$$S_n < \int_1^{n+1} f(x) dx + U_1. \quad (16.32)$$

Теперь докажем первую часть теоремы. По условию несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx. \quad (16.33)$$

Интеграл с переменным верхним пределом $n+1$ есть возрастающая функция от n , следовательно, этот интеграл стремится к своему пределу, возрастая при $n \rightarrow \infty$, поэтому он остается всегда меньше своего предела. Итак,

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{или} \quad \int_1^{n+1} f(x) dx + U_1 < \int_1^{+\infty} f(x) dx + U_1.$$

Отсюда и из (16.32) следует, что $S_n < \int_1^{+\infty} f(x) dx + U_1$ для всех n .

Значит, S_n есть ограниченная функция от n . Но, как уже отмечалось, S_n есть возрастающая функция от n . Таким образом, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Это означает, что ряд (16.1) сходится. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Дано, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Это означает, что не существует конечный

предел (16.33). При этом обязательно функция $\int_1^{n+1} f(x) dx \rightarrow \infty$ и является неограниченной (если бы эта функция была ограниченной, то она имела бы конечный предел). Но тогда из (16.31) следует, что $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (16.1) расходится. Теорема доказана.

Пример 2. Докажем, что гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ расходится.

Члены этого ряда положительны и убывают. Возьмем функцию $f(x) = 1/x$ — убывающую непрерывную функцию, причем для любого натурального n имеем $f(n) = 1/n = U_n$. Таким образом, выполнены все

условия теоремы 16.9. Для несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} x^{-1} dx$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} x^{-1} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} x^{-1} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} (\ln \eta - \ln 1) = +\infty.$$

Значит, несобственный интеграл расходится. Это означает, что гармонический ряд расходится.

§ 16.6. Знакопередающие ряды

Пусть $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ — положительные числа. Ряд вида

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots \quad (16.34)$$

называется *знакопередающим рядом*. Для этого ряда имеет место

Теорема 16.10 (Лейбница). *Если для ряда (16.34) выполняются следующие условия: $U_1 > U_2 > U_3 > \dots > U_n > \dots$; $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, то этот ряд сходится, причем его сумма положительна и меньше первого члена ряда.*

Доказательство. Запишем сумму первых $n = 2m$ членов ряда (16.34):

$$S_{2m} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2m-3} - U_{2m-2}) + (U_{2m-1} - U_{2m}). \quad (16.35)$$

В силу условий теоремы все разности, стоящие в скобках, положительны; следовательно, сумма S_{2m} положительна. Кроме того, с увеличением числа $2m$ увеличивается число положительных разностей в правой части (16.35), т.е. с увеличением $2m$ сумма S_{2m} возрастает. Далее, сгруппировав слагаемые иначе, запишем формулу (16.35) так: $S_{2m} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2m-2} - U_{2m-1}) - U_{2m}$. При всех $2m \geq 4$ в правой части последней формулы из выражения $U_1 - (U_2 - U_3)$ вычи-

таются положительные слагаемые (разности в скобках положительны в силу условия теоремы), так что $S_{2m} < U_1 - (U_2 - U_3)$. Отсюда видно, что S_{2m} является ограниченной функцией от m . Так как S_{2m} к тому же является возрастающей функцией, то согласно теории пределов S_{2m} имеет конечный предел $\lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$. Но пока мы не можем сказать, что ряд (16.34) сходится, так как рассмотрели только его четные частичные суммы. Необходимо рассмотреть еще и нечетные частичные суммы этого ряда.

В соотношении $S_{2m+1} = S_{2m} + U_{2m+1}$ перейдем к пределу при $2m \rightarrow \infty$ и учтем, что предел правой части равен сумме пределов слагаемых:

$$\lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{2m \rightarrow \infty} U_{2m+1}.$$

В правой части первый предел равен S , а второй предел равен нулю в силу условия теоремы, поэтому $\lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$.

Таким образом, и четная, и нечетная частичные суммы ряда (16.34) имеют один и тот же конечный предел, а это значит, что ряд сходится.

Теперь покажем, что сумма сходящегося ряда меньше U_1 . Учтывая (16.35), при $2m \geq 4$ получим $U_1 - U_2 < S_{2m} < U_1 - (U_2 - U_3)$. В этом соотношении перейдем к пределу при $2m \rightarrow \infty$, но, как известно из теории пределов, при переходе к пределу в неравенстве предельное неравенство может быть нестрогим. Поэтому $U_1 - U_2 \leq \lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m} \leq U_1 - (U_2 - U_3)$, где $\lim_{2m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ — сумма ряда (16.34). Заметим, что $U_1 - (U_2 - U_3) < U_1$, так как из U_1 вычитается положительная разность; кроме того, $U_1 - U_2 > 0$. Поэтому $0 < S < U_1$. Теорема доказана полностью.

Умножив ряд (16.34) на -1 , получим знакочередующийся ряд с первым отрицательным членом. Сумма его будет отрицательной и большей первого члена.

Пример. Возьмем ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$. Он удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. В самом деле, $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится, его сумма положительна и меньше единицы.

§ 16.7. Знакопеременные ряды

Числовой ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные. Ясно, что знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного, когда в последнем знаки членов чередуются.

Теорема 16.11 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Дан знакопеременный ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$, а также ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots + |U_n| + \dots \quad (16.36)$$

Тогда если сходится ряд (16.36), то сходится и исходный знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть S_n и $\tilde{S}_n$ — частичные суммы указанных выше рядов, т. е.

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n, \quad (16.37)$$

$$\tilde{S}_n = |U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots + |U_n|. \quad (16.38)$$

Пусть S_n^+ — соответственно сумма положительных слагаемых в правой части (16.37). Ясно, что эта сумма равна также сумме абсолютных величин этих слагаемых. Пусть S_n^- — сумма абсолютных величин отрицательных слагаемых в правой части (16.37). Ясно, что величина $-S_n^-$ равна сумме отрицательных слагаемых этой формулы, поэтому

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad (16.39)$$

$$\tilde{S}_n = S_n^+ + S_n^-. \quad (16.40)$$

Ряд (16.36) сходится согласно условиям теоремы, а это означает, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S}$. Но $\tilde{S}_n$, как видно из (16.38), состоит из положительных слагаемых. С увеличением числа n число этих слагаемых растет, значит, $\tilde{S}_n$ есть возрастающая функция от n . Таким образом, $\tilde{S}_n$, возрастая, стремится к пределу $\tilde{S}$, поэтому $\tilde{S}_n$ остается всегда меньше своего предела, т. е. для всех n

$$\tilde{S}_n < \tilde{S}. \quad (16.41)$$

Согласно (16.40) S_n^+ и S_n^- — положительные слагаемые, составляющие $\tilde{S}_n$. Ясно, что каждое из этих слагаемых не больше $\tilde{S}_n$, т. е. $S_n^+ \leq \tilde{S}_n$ и $S_n^- \leq \tilde{S}_n$. С учетом (16.41) получим $S_n^+ < \tilde{S}$ и $S_n^- < \tilde{S}$ для всех n , т. е. S_n^+ и S_n^- — ограниченные функции от n . Но они являются, кроме того, возрастающими функциями, так как состоят из положительных членов. С ростом числа членов S_n^+ и S_n^- возрастают. Таким образом, S_n^+ , S_n^- суть возрастающие ограниченные функции от n , поэтому при $n \rightarrow \infty$ существуют их конечные пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ = S^+$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = S^-$. Теперь в (16.39) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учтём, что предел разности справа равен разности пределов слагаемых, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-$. Пределы справа равны соответственно S^+ и S^- .

Итак, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S^+ - S^-$. Это означает, что исходный знакопеременный ряд сходится. Теорема доказана.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (16.36), составленный из абсолютных величин членов этого знакопеременного ряда.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если этот знакопеременный ряд сходится, а ряд (16.36), составленный из абсолютных величин членов этого знакопеременного ряда, расходится.

Пример 1. Дан знакопеременный (знакочередующийся) ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. Соответственно $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ есть ряд абсолютных величин. Рассматриваемый знакопеременный ряд, как мы видели, сходится, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов — гармонический ряд — расходится. Значит, рассматриваемый знакопеременный ряд сходится условно.

Пример 2. Дан ряд $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \dots$. Запишем ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Этот ряд сходится, так как представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $1/2$, поэтому исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 16.12. *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

Коротко можно сказать, что в абсолютно сходящемся ряде можно переставлять его члены. При перестановке бесконечного числа слагаемых условно сходящегося ряда мы получим ряд, который, вообще говоря, будет иметь уже другую сумму и может даже расходиться.

Глава 17

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 17.1. Теорема Абеля

Ряд $U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$ называется *функциональным*, если его члены являются функциями аргумента x , т. е. ряд имеет вид

$$U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) + \dots \quad (17.1)$$

При каждом конкретном значении x ряд (17.1) будет представлять собой числовой ряд, который может сходиться, но может и расходиться. Совокупность всех значений x , при которых функциональный ряд (17.1) сходится, называется *областью сходимости* этого функционального ряда.

Рассмотрим простейшие примеры функциональных рядов — так называемые степенные ряды.

Степенным называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (17.2)$$

в котором $a_0, a_1, a_2, \dots$ — заданные числа, называемые *коэффициентами ряда*.

Теорема 17.1 (Абеля). *Если степенной ряд (17.2) сходится в некоторой точке x_0 ($x_0 \neq 0$), то он сходится абсолютно при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$, т. е. в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$.*

Доказательство. Ряд (17.2) сходится в точке x_0 , т. е. сходится числовой ряд $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots$. В силу необходимого признака сходимости при $n \rightarrow \infty$ общий член этого ряда стремится к нулю, т. е. $a_nx_0^n \rightarrow 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Так как $a_nx_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то по определению предела для выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех $n \geq N$

$$|a_nx_0^n| < \varepsilon. \quad (17.3)$$

В рассматриваемом числовом ряде выделим первые N членов и запишем их абсолютные величины вместе с ε :

$$|a_0|, |a_1x_0|, |a_2x_0^2|, \dots, |a_Nx_0^N|, \varepsilon. \quad (17.4)$$

Пусть $M > 0$ — наибольшее из чисел (17.4). Тогда для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ будем иметь

$$|a_nx_0^n| \leq M. \quad (17.5)$$

В самом деле, для всех $n \geq N$ это неравенство получим из (17.3), если учтем, что $\varepsilon \leq M$. Кроме того, первые $(N+1)$ чисел (17.4) этому неравенству также удовлетворяют, так как M есть наибольшее из чисел (17.4).

Рассматриваемый ряд (17.2), умножив и поделив его члены на x_0 в соответствующей степени, запишем в виде

$$a_0 + a_1x_0(x/x_0) + a_2x_0^2(x/x_0)^2 + \dots + a_nx_0^n(x/x_0)^n + \dots$$

Запишем также ряд, состоящий из абсолютных величин членов последнего ряда:

$$|a_0| + |a_1x_0| |x/x_0| + |a_2x_0^2| |x/x_0|^2 + \dots + |a_nx_0^n| |x/x_0|^n + \dots \quad (17.6)$$

Кроме того, рассмотрим ряд

$$M + M|x/x_0| + M|x/x_0|^2 + \dots + M|x/x_0|^n + \dots \quad (17.7)$$

Пусть $|x| < |x_0|$, следовательно, $|x/x_0| = |x|/|x_0| < 1$, тогда ряд (17.7) сходится, так как является геометрической прогрессией со знаменателем $|x/x_0| < 1$. Но тогда сходится и ряд (17.6), так как его члены в силу (17.5) не больше соответствующих членов сходящегося ряда (17.7). Но сходимость ряда (17.6) означает, что ряд (17.2) сходится абсолютно. Теорема доказана.

Следствие. Если степенной ряд (17.2) расходится в точке x'_0 , то он расходится для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x'_0|$, т.е. при всех x , лежащих в интервалах $-\infty < x < -|x'_0|$ и $|x'_0| < x < +\infty$.

Доказательство. Предположим, что в точке x , для которой $|x| > |x'_0|$, ряд сходится. Тогда по теореме Абеля придем к заключению, что степенной ряд сходится в точке x'_0 , что противоречит условию.

§ 17.2. Радиус сходимости степенного ряда

Радиусом сходимости степенного ряда (17.2) называется число R , при котором для всех точек x , удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд (17.2) абсолютно сходится, а для всех точек x , удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, ряд (17.2) расходится.

Таким образом, областью сходимости ряда (17.2) является интервал $-R < x < R$, а в интервалах $-\infty < x < -R$ и $R < x < \infty$ ряд

расходится. На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm R$, ряд может сходиться, но может и расходиться. Этот вопрос требует в каждом случае специального рассмотрения.

Выведем формулу для вычисления радиуса сходимости степенного ряда (17.2) по известным его коэффициентам $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Запишем ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного степенного ряда:

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots \quad (17.8)$$

Этот ряд для каждого конкретного значения x представляет собой числовой ряд с положительными членами, поэтому для исследования его сходимости можно использовать, например, признак Даламбера, согласно которому нужно рассмотреть предел

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|.$$

Предел берется при $n \rightarrow \infty$, при этом фиксированную величину x , не зависящую от n , можно вынести за знак предела, а оставшийся предел обозначим

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad (17.9)$$

считая, что этот предел существует. Тогда $l = |x|L$.

Согласно признаку Даламбера при $l = |x|L < 1$, т.е. при $|x| < 1/L$, ряд (17.8) сходится (здесь мы считаем, что $L > 0$; о случае $L = 0$ будет сказано ниже). Это означает, что ряд (17.2) сходится абсолютно. При $l = |x|L > 1$, т.е. при $|x| > 1/L$, ряд (17.8) расходится. Как ясно из доказательства признака Даламбера, при $l > 1$ у ряда (17.8) общий член не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но тогда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и общий член ряда (17.2). Согласно достаточному признаку расходимости ряд (17.2) расходится.

Итак, мы показали, что для всех x , для которых имеет место неравенство $|x| < 1/L$, ряд (17.2) абсолютно сходится, а для всех x , для которых имеет место $|x| > 1/L$, ряд (17.2) расходится. Это означает, что число $1/L$ есть радиус сходимости R ряда (17.2). Теперь с учетом (17.9) можно записать следующую формулу для вычисления радиуса сходимости степенного ряда (17.2):

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (17.10)$$

По этой формуле можно вычислить радиус сходимости степенного ряда, зная его коэффициенты.

Если для исследования сходимости ряда (17.8) использовать радикальный признак Коши, то для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (17.2) получим формулу

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (17.11)$$

По определению примем, что $R = \infty$ при $L = 0$ и $R = 0$ при $L = \infty$.

Пример 1. Найдем радиус сходимости степенного ряда $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$. Здесь для всех n имеем $a_n = 1$, поэтому $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Итак, по формуле (17.10) радиус сходимости рассматриваемого ряда равен 1, поэтому ряд абсолютно сходится в интервале $-1 < x < 1$.

Рассмотрим поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x = 1$ ряд принимает вид $1 + 1 + 1 + \dots$ и расходится, так как его общий член равен 1 и не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Совершенно аналогично приходим к заключению, что при $x = -1$ ряд также расходится (общий член ряда будет равен ± 1).

Пример 2. Найдем радиус сходимости степенного ряда $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$. Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, в частности, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Имеем $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, поэтому $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$. По формуле (17.10) найдем $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ и, следовательно, $R = \infty$. Это означает, что ряд сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. на всей числовой оси.

Пример 3. Найдем радиус сходимости степенного ряда $1 + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots$. Здесь $a_n = n^n$. Для нахождения радиуса сходимости ряда вычислим $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. По формуле (17.11) получим $R = 1/\infty = 0$. Значит, ряд расходится при любом x , не равном нулю; он сходится только в точке $x = 0$.

§ 17.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Дан степенной ряд (17.2), и пусть R — радиус его сходимости. Тогда ряд абсолютно сходится в интервале $(-R, R)$, т. е. для каждого x из этого интервала (17.2) он представляет собой сходящийся числовой ряд с определенной суммой S . Ясно, что для каждого x эта сумма будет своя, т. е. она является функцией от x . Будем обозначать ее $S(x)$. По определению эта сумма есть предел n -й частичной суммы ряда при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для каждого x из интервала сходимости имеем

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n), \quad -R < x < R. \quad (17.12)$$

В этом случае будем писать условное равенство

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad -R < x < R,$$

которое понимается в том смысле, что имеет место соотношение (17.12). Приведем без доказательства следующие две теоремы.

Теорема 17.2. *Степенной ряд, полученный почленным дифференцированием степенного ряда (17.2), также сходится в интервале $(-R, R)$ и имеет сумму, равную производной от суммы ряда (17.2), т. е.*

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \quad -R < x < R.$$

Следствие. *Сумма степенного ряда (17.2) является функцией, непрерывной в интервале его сходимости.*

В самом деле, непрерывность указанной суммы вытекает из ее дифференцируемости.

Теорема 17.3. *Степенной ряд, полученный почленным интегрированием ряда (17.2) в интервале его сходимости от нуля до x , $-R < x < R$, также сходится в интервале $(-R, R)$ и имеет сумму, равную соответствующему интегралу от суммы ряда (17.2), т. е. для $-R < x < R$*

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x a_0 dt + \int_0^x a_1 t dt + \int_0^x a_2 t^2 dt + \dots + \int_0^x a_n t^n dt + \dots,$$

или после интегрирования

$$\int_0^x S(t) dt = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots. \quad (17.13)$$

В правой части (17.13) снова стоит степенной ряд, который можно еще раз проинтегрировать в интервале сходимости. Таким образом, степенной ряд (17.2) можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз в интервале его сходимости.

§ 17.4. Ряды по степеням $x - x_0$

Пусть x_0 — заданное число. Возьмем ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (17.14)$$

который называют *степенным рядом по степеням $x - x_0$* . Здесь $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — заданные числа, называемые *коэффициентами ряда*. Положим $x - x_0 = X$, тогда ряд (17.14) примет вид

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + \dots. \quad (17.15)$$

Это обычный степенной ряд. Пусть R — радиус его сходимости, тогда ряд сходится в интервале $-R < X < R$.

Ряд (17.14) получается из ряда (17.15) указанной выше заменой переменной, поэтому область сходимости ряда (17.14) получается из области сходимости ряда (17.15) той же заменой. Таким образом, область сходимости ряда (17.14) определяется формулой $x_0 - R < x < x_0 + R$.

§ 17.5. Формула Тейлора

Пусть дана функция $f(x)$, которая имеет в окрестности точки x_0 (иначе говоря, в некотором интервале, внутри которого лежит точка x_0) все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Найдем значения функции и ее производных в точке x_0 : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0)$. Составим сумму

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (17.16)$$

и образуем разность

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x). \quad (17.17)$$

Будем искать функцию $R_n(x)$ в виде

$$R_n(x) = Q(x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (17.18)$$

Таким образом, нахождение $R_n(x)$ сводится к отысканию $Q(x)$.

В формулу (17.17) подставим выражения (17.16), (17.18) и запишем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (17.19)$$

Здесь x_0 — заданное число, а x — переменная величина. Зафиксируем x и рассмотрим переменную t , которая изменяется в интервале (x_0, x) при $x_0 < x$ и в интервале (x, x_0) при $x_0 > x$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!} (x - t) - \frac{f''(t)}{2!} (x - t)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (17.20)$$

При $t = x$ эта функция принимает значение $F(t)|_{t=x} = F(x) = 0$. При $t = x_0$ имеем $F(t)|_{t=x_0} = F(x_0) = 0$ в силу формулы (17.19). Функция $F(t)$ дифференцируема и имеет производную

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!} Q(x). \quad (17.21)$$

Таким образом, функция $F(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.5 (Ролля). Поэтому в интервале (x_0, x) (для определенности считаем $x_0 < x$) найдется такая точка ξ , в которой производная $F'(t)$ обращается в нуль, т.е. $F'(\xi) = 0$ (касательная к графику функции $y = F(t)$ в точке с абсциссой параллельна оси Ot , рис. 17.1). Указанное значение ξ подставим вместо t в формулу (17.21) и приравняем эту сумму нулю, так как $F'(\xi) = 0$. Из этого равенства найдем $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi)$ и подставим в (17.18) и (17.19). Получим

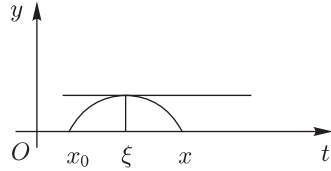


Рис. 17.1

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (17.22)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned} \quad (17.23)$$

В этих формулах, как отмечалось, ξ — некоторая точка, лежащая в интервале (x_0, x) или в интервале (x, x_0) . Формула (17.23) называется *формулой Тейлора*. Выражение (17.22), представляющее собой последнее слагаемое формулы (17.23), называется *остаточным членом формулы Тейлора*.

§ 17.6. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть x_0 — заданное число. Пусть в некоторой окрестности x_0 задана функция $f(x)$, которая имеет производные всех порядков. Вычислим значения этой функции и ее производных в точке x_0 : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0)$, $\dots$ и образуем степенной ряд по степеням $x - x_0$:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad (17.24)$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора для функции $f(x)$* .

Рассмотрим $(n+1)$ -ю частичную сумму членов этого ряда. Она представляет собой функцию $P_n(x)$, определенную формулой (17.16):

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Как мы знаем, если существует конечный предел этой суммы при $n \rightarrow \infty$, то ряд (17.24) сходится и сумма ряда равна этому пределу для рассматриваемого значения x . Обратимся к формуле Тейлора (17.23) и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая, что предел суммы справа равен сумме пределов слагаемых и предел функции $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ равен $f(x)$, так как $f(x)$ не зависит от n . Получим

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x). \quad (17.25)$$

Отсюда видно, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad (17.26)$$

то $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$. Это означает, во-первых, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, т.е. ряд (17.24) сходится, а во-вторых, что этот предел, т.е. сумма ряда (17.24), равен исходной функции $f(x)$. Таким образом, в этом случае ряд Тейлора (17.24), построенный для функции $f(x)$, сходится и имеет сумму, равную этой функции $f(x)$. При этом говорят, что *функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора* или что *ряд Тейлора, построенный для нее, представляет эту функцию*, и записывают равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (17.27)$$

Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, то, как видно из (17.25), $f(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, если даже предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ существует и конечен, т.е. если сходится ряд Тейлора, построенный для функции $f(x)$. Сумма этого ряда не будет равна заданной функции $f(x)$. Иначе говоря, ряд Тейлора для функции $f(x)$, если даже он сходится, будет иметь сумму, отличную от $f(x)$. В этом случае говорят, что *функция не разлагается в ряд Тейлора*, или *ряд Тейлора указанной функции не представляет эту функцию*.

Ряд Тейлора, построенный для случая $x_0 = 0$, называется *рядом Маклорена*. Как видно из (17.24), ряд Маклорена имеет вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (17.28)$$

Остаточный член формулы Тейлора (17.22) теперь примет вид

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (17.29)$$

Здесь $0 < \xi < x$ при $x > 0$ и $x < \xi < 0$ при $x < 0$. Если имеет место условие (17.26), то ряд Маклорена (17.28) сходится к функции $f(x)$ и имеет место условное равенство, аналогичное (17.27):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (17.30)$$

§ 17.7. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

1. Пусть $f(x) = e^x$. Имеем $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1$. Поэтому ряд Маклорена (17.28) для рассматриваемой функции примет вид

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (17.31)$$

Радиус сходимости этого ряда мы вычислили ранее и показали, что он равен бесконечности. Это означает, что ряд (17.31) сходится на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$, т. е. для любого x .

Необходимо еще рассмотреть поведение остаточного члена формулы Тейлора $R_n(x)$. Он определяется формулой (17.29) и для функции $f(x) = e^x$ примет вид

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}e^\xi}{(n+1)!}. \quad (17.32)$$

Так как ряд (17.31) сходится для любого x , то согласно необходимому признаку сходимости ряда $(n+1)$ -й член ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, для любого x при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (17.33)$$

Рассмотрим сначала поведение $R_n(x)$ в (17.32) при $n \rightarrow \infty$ для фиксированного $x > 0$. Имеем $0 < \xi < x$, поэтому $e^\xi < e^x$, причем e^x — фиксированное число. В формуле (17.32) величина ξ для каждого n имеет свое значение, т. е. является функцией от n , но при этом e^ξ будет ограниченной функцией от n , так как $e^\xi < e^x$ при любом n . Другой сомножитель в правой части формулы (17.32) в силу условия (17.33)

есть бесконечно малая функция. Согласно теории пределов, произведение бесконечно малой и ограниченной функций есть функция, бесконечно малая при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выражение (17.32) есть функция, бесконечно малая при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x > 0$. Аналогично можно показать, что это свойство остается в силе и для любого $x < 0$. Таким образом, для любого x имеет место соотношение (17.26), поэтому ряд Маклорена (17.31) для функции e^x для любого x представляет эту функцию, т. е. справедливо равенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, ... Вычислим значения функции и ее производных в точке $x_0 = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, ... Ряд (17.28) примет вид $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$. Можно показать, что этот ряд имеет радиус сходимости, равный бесконечности. Остается рассмотреть поведение остаточного члена формулы (17.29) для функции $f(x) = \sin x$.

Производная любого порядка от $\sin x$ равна либо $\pm \cos x$, либо $\pm \sin x$, значит, $|f^{(n+1)}(x)| = |\sin x|$ или $|f^{(n+1)}(x)| = |\cos x|$. Следовательно, $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\sin \xi|$ или $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos \xi|$. Иначе говоря, $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$. При любом x первый сомножитель в (17.29) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ согласно (17.33), и произведение этой величины на ограниченную величину $|f^{(n+1)}(\xi)|$ есть бесконечно малая функция при $n \rightarrow \infty$ для любого x .

Итак, для любого x функция $R_n(x)$ в (17.29) удовлетворяет условию (17.26), поэтому ряд, построенный для $f(x) = \sin x$, представляет эту функцию, т. е.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (17.34)$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Поступив совершенно аналогично, покажем, что для $\cos x$ справедливо следующее разложение в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m — любое действительное число.

Найдем производные

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)](1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)](m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

вычислим их значения в точке $x = 0$ и составим ряд Маклорена для рассматриваемой функции:

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!}x^n + \\ + \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)](m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots \quad (17.35)$$

Найдем радиус сходимости этого ряда, для этого вычислим

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right|.$$

Чтобы раскрыть неопределенность типа ∞/∞ под знаком предела, поделим на n числитель и знаменатель дроби и получим $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m/n-1}{1/n+1} \right| = 1$, $R = 1/L = 1$. Это означает, что ряд сходится в интервале $-1 < x < 1$.

Осталось рассмотреть поведение остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора для рассматриваемой функции при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$f^{(n+1)}(\xi) = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)](m-n)(1+\xi)^{m-n-1}.$$

Это выражение подставим в формулу (17.29) и получим

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)](m-n)(1+\xi)^{m-n-1}.$$

В этом выражении ξ есть некоторая заранее неизвестная точка, лежащая между нулем и x , причем $-1 < x < 1$. Для таких x можно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, для $-1 < x < 1$ ряд (17.35) для функции $(1+x)^m$ представляет эту функцию, т. е.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Этот ряд называют *биномиальным*. Отметим, что если при этом m — целое положительное число, то в правой части останется только конечное число слагаемых, так как производные порядков $m+1$ будут тождественными нулями. В результате получим частный случай так называемой *формулы бинома Ньютона*.

§ 17.8. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Вычисление значений функций. Возьмем разложение (17.34) функции $\sin x$ в ряд Маклорена. В этой формуле положим $x = \pi/18$ (10°) и получим

$$\sin \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{(\pi/18)^3}{3!} + \frac{(\pi/18)^5}{5!} - \frac{(\pi/18)^7}{7!} + \dots$$

Если бы нам удалось найти сумму S ряда в правой части, то получили бы точное значение $\sin(\pi/18)$. Но найти эту сумму не удастся, поэтому ее приближенно заменим n -й частичной суммой S_n указанного ряда, помня, что $S_n \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$. Приближенное равенство $S_n \approx S$ будет тем точнее, чем больше n . Таким образом, в правой части можно сохранить первые n слагаемых, а остальные отбросить. Тем самым получим приближенную формулу для нахождения $\sin(\pi/18)$.

Сохраним в ряде первые два слагаемых и получим приближенную формулу

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{(\pi/18)^3}{3!}, \quad (17.36)$$

погрешность которой равна сумме отброшенного ряда $\frac{(\pi/18)^5}{5!} - \frac{(\pi/18)^7}{7!} + \dots$. Это знакопеременный ряд, и для него выполняются все условия теоремы 16.10 (Лейбница). Поэтому ряд сходится, сумма его положительна и меньше первого члена ряда. Таким образом, в приближенной формуле (17.36) погрешность меньше этого первого члена $\frac{(\pi/18)^5}{5!} < 4 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, мы записали приближенную формулу для вычисления $\sin(\pi/18)$ и указали ее погрешность. Сохранив в разложении для $\sin(\pi/18)$ большее число первых членов, получим более точную формулу.

Приближенное вычисление определенных интегралов. Пусть, например, требуется найти $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$, где a — некоторое положительное число. Этот интеграл не удастся вычислить по формуле Ньютона–Лейбница, так как первообразную для подынтегральной функции невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому интеграл можно вычислить только приближенно, например, по формуле трапеций (§ 12.11). Рассмотрим здесь метод, основанный на использовании степенных рядов.

Считая, что $x \neq 0$, поделим соотношение (17.34) на x и получим $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$. Этот ряд, как и предыдущий, сходится для любого x . С учетом теоремы о почленном интегрировании степенных рядов проинтегрируем ряд в интервале от 0 до a :

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a dx - \int_0^a \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^a \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^a \frac{x^6}{7!} dx + \dots$$

В правой части вычислим интегралы и окончательно получим

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots \quad (17.37)$$

Если бы нам удалось найти сумму ряда в правой части (17.37), то нашли бы точное значение искомого интеграла. Но эту сумму найти не удается, поэтому приближенно заменим ее n -й частичной суммой ряда, отбросив все остальные члены, и получим приближенную формулу для вычисления исходного интеграла.

Заменим приближенно указанную сумму ряда для интеграла второй частичной суммой:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx \approx a - \frac{a^3}{3! \cdot 3}. \quad (17.38)$$

Погрешность этой формулы равна сумме отброшенного ряда $\frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$. Это знакопередающийся ряд, который сходится. По теореме Лейбница его сумма положительна и меньше первого члена $\frac{a^5}{5! \cdot 5}$. Таким образом, формула (17.38) дает приближенное значение искомого интеграла, и погрешность этой формулы меньше $\frac{a^5}{600}$.

§ 17.9. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Пусть, например, нужно найти решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'), \quad (17.39)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (17.40)$$

Здесь x_0, y_0, y'_0 — заданные числа, а $F(x, y, y')$ есть известное выражение, содержащее x, y, y' . Функцию $F(x, y, y')$ считаем дифференцируемой сколько угодно раз по своим аргументам.

Согласно теореме 15.2, уравнение (17.39) с правой частью, для которой выполняются условия этой теоремы, имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (17.40). Предположим, что искомое решение $y(x)$ разлагается в ряд Тейлора, и соответственно будем искать его в виде

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (17.41)$$

Ряд (17.41) будет найден, если вычислим все его коэффициенты, т. е. найдем числа $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0), \dots$. Значение $y(x_0) = y_0$ искомой функции в точке x_0 задано в первом начальном условии в (17.40). Аналогично $y'(x_0)$ есть значение $y'(x)|_{x=x_0} = y'_0$, заданное во втором начальном условии (17.40).

В уравнении (17.39) y'', y, y' суть значения соответственно $y''(x), y(x), y'(x)$, взятые в точке x . Поэтому при $x = x_0$ под y'', y, y' в (17.39) будем понимать соответственно $y''(x_0), y(x_0), y'(x_0)$. Таким образом, $y''(x_0) = F(x_0, y(x_0), y'(x_0))$. В правой части этого равенства стоит известное выражение F , содержащее известные числа $x_0, y(x_0), y'(x_0)$. Значит, мы нашли значение $y''(x_0)$, используя исходное уравнение (17.39). Продифференцируем (17.39) по x . Тогда слева появится y''' , а в правой части, кроме x, y, y' , появится еще y'' . В итоге получим соотношение

$$y''' = \Phi(x, y, y', y''), \quad (17.42)$$

в котором правая часть Φ есть известное выражение, содержащее x, y, y', y'' . По аналогии с предыдущим, если в выражении (17.43) положить $x = x_0$, то получим $y'''(x_0) = \Phi(x_0, y(x_0), y'(x_0), y''(x_0))$. Далее, снова продифференцировав по x соотношение (17.43), в полученное соотношение подставим $x = x_0$ и найдем $y^{(4)}(x_0)$. Продолжив этот процесс, получим все коэффициенты разложения (17.41). Если бы нам удалось найти сумму ряда Тейлора в правой части формулы (17.41), то мы бы нашли искомое решение точно. Как правило, эту сумму найти не удастся, но мы можем получить приближенное выражение для искомого решения, сохранив в (17.41) первые $(n + 1)$ слагаемых, отбросив остальные, иначе говоря, заменив сумму ряда $(n + 1)$ -й частичной суммой:

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Таким образом, приближенное выражение для искомого решения можно найти всегда.

Пример. Нужно найти решение дифференциального уравнения $y'' = -y$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение будем искать, как и раньше, в виде ряда (17.25), но теперь $x_0 = 0$. Поэтому решение $y(x)$ будем искать в виде ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots, \quad (17.43)$$

в котором требуется найти все коэффициенты. Согласно начальным условиям имеем $y(0) = y|_{x=0} = 0$, $y'(0) = y'|_{x=0} = 1$. Теперь заметим, что исходное уравнение дает $y''|_{x=0} = -y|_{x=0}$, но $y|_{x=0} = 0$, поэтому $y''|_{x=0} = -y(0) = 0$. Продифференцировав уравнение по x , получим $y''' = -y'$, $y^{(4)} = -y''$, $y^{(5)} = -y'''$, $\dots$. Взяв последние соотношения для $x = 0$, найдем $y'''(0) = -y'(0)$, $y^{(4)}(0) = -y''(0)$, $y^{(5)}(0) = -y'''(0)$, $\dots$. Таким образом, при $x = 0$ каждая четная производная равна предыдущей четной производной, взятой с обратным знаком. Но $y''(0) = 0$, поэтому все четные производные равны нулю (при $x = 0$). Аналогично каждая нечетная производная при $x = 0$ равна предыдущей нечетной производной, взятой с обратным знаком. Например, $y'(0) = 1$, поэтому $y'''(0) = -1$, $y^{(5)}(0) = 1$. Таким образом, разложение (17.17) примет вид $y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. В правой части этой формулы стоит степенной ряд, сумма которого согласно (17.34) равна $\sin x$. Итак, искомое решение $y(x) = \sin x$. Если бы нам не удалось найти сумму ряда, то мы получили бы приближенное решение уравнения, сохранив первые несколько членов разложения и отбросив остальные. Например, $y(x) \approx x - \frac{x^3}{3!}$.

Глава 18

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 18.1. Предварительные замечания

Получим несколько соотношений, которые будем использовать в дальнейшем.

Для любых отличных от нуля целых n имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0. \quad (18.1)$$

В самом деле, множитель n можно внести за знак дифференциала: $d(nx) = (nx)'_x \, dx = n \, dx$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (nx) \, d(nx) = \\ &= \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\sin \pi n - \sin (-\pi n)) = 0. \end{aligned}$$

Вторая формула в (18.1) обосновывается аналогично.

Для отличных от нуля целых n и k при $n \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx &= 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx &= 0. \end{aligned} \quad (18.2)$$

При отличных от нуля целых $n = k$ последние три формулы заменяются следующими:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi. \quad (18.3)$$

Для обоснования (18.2), (18.3) используем известные тригонометрические формулы. Например, для вывода первой из формул (18.2) возьмем интегралы от $-\pi$ до π от обеих частей следующего равенства: $\cos nx \cos kx = (1/2) [\cos (n+k)x + \cos (n-k)x]$. Вынесем $1/2$ за знак интеграла и получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos (n+k)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n-k)x dx \right]. \quad (18.4)$$

При целых $n \neq k$ целые числа $n+k$ и $n-k$ отличны от нуля. Тогда оба интеграла в правой части формулы (18.4) равны нулю согласно первой формуле (18.1). Таким образом, правая часть (18.4) равна нулю, что и требовалось доказать. При $n=k$ первый интеграл в правой части (18.4) равен нулю согласно первой формуле (18.1), так как $n+k=2n \neq 0$, а второй интеграл равен $\int_{-\pi}^{\pi} dx = x|_{-\pi}^{\pi} = \pi + \pi = 2\pi$. Итак, получили первую формулу (18.3). Остальные формулы обосновываются аналогично.

Дадим теперь несколько определений.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом 2π , если для любого x имеем $f(x+2\pi) = f(x)$. Заменяя здесь x последовательно на $x \pm 2\pi$, $x \pm 4\pi$, ..., придем к выводу, что справедливо соотношение

$$f(x+2\pi n) = f(x), \quad (18.5)$$

где n — любое целое число.

Заметим, что периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π достаточно задать в интервале $(-\pi, \pi]$, и тогда во всех интервалах $(-3\pi, -\pi]$, $(\pi, 3\pi]$, $(3\pi, 5\pi]$ и т. д. значения функции $f(x)$ определяются согласно (18.5).

График такой функции также достаточно представить в интервале $(-\pi, \pi]$. В самом деле, для остальных указанных интервалов длины 2π график функции $f(x)$ можно получить сдвигом вдоль оси Ox , так как точки графика функции $f(x)$ с абсциссами x , $x+2\pi n$ имеют согласно (18.5) равные ординаты.

Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (18.6)$$

называется *тригонометрическим рядом*, причем здесь $a_0, a_1, b_1, \dots$ — заданные числа, называемые *коэффициентами ряда*. Коротко ряд (18.6) записывают с помощью символа суммы так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Пусть ряд (18.6) сходится и имеет сумму $S(x)$, тогда, как известно (см. гл. 17), можно записать равенство

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (18.7)$$

В этом соотношении заменим x на $x + 2\pi$ и получим

$$\begin{aligned} S(x + 2\pi) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x + 2\pi) + b_1 \sin(x + 2\pi) + \dots \\ &\dots + a_n \cos n(x + 2\pi) + b_n \sin n(x + 2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Так как функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период, равный 2π , то соответствующие слагаемые правых частей последней формулы и формулы (18.6) будут равны, поэтому будут равны правые части этих формул; значит, будут равны и левые части, и имеет место равенство $S(x) = S(x + 2\pi)$. Таким образом, если тригонометрический ряд (18.6) сходится и имеет сумму $S(x)$, то последняя обязательно будет периодической функцией с периодом 2π .

§ 18.2. Ряд Фурье. Условия Дирихле

Рассмотрим следующую задачу. Дана периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π . Возникает вопрос, нельзя ли для этой функции подобрать тригонометрический ряд вида (18.6) (т. е. найти его коэффициенты) так, чтобы этот ряд сходился и его сумма была равна заданной функции $f(x)$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (18.8)$$

Предположим, что ряд (18.8) можно почленно интегрировать в интервале от $-\pi$ до π . Выполним это интегрирование и, вынося коэффициенты ряда за знаки интегралов, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \dots \\ &\dots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \dots \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части равен 2π , а все остальные равны нулю в силу формул (18.1). Итак, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0\pi$. Отсюда находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (18.9)$$

Умножив ряд (18.8) на $\cos nx$ и почленно проинтегрировав в интервале $(-\pi, \pi)$ полученное соотношение, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \\ &+ a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin x dx + \dots \\ &\dots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx + \dots \end{aligned}$$

Согласно первой из формул (18.3) интеграл при a_n равен π , все остальные интегралы равны нулю согласно формулам (18.1)–(18.3). Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n\pi.$$

Отсюда найдем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (18.10)$$

Умножив ряд (18.8) на $\sin nx$ и почленно проинтегрировав в интервале $(-\pi, +\pi)$ полученное соотношение, аналогично получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (18.11)$$

Положив в формулах (18.10), (18.11) $n = 1, 2, 3, \dots$, найдем коэффициенты $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$. Коэффициенты $a_0, a_1, b_1, \dots$, определяемые по формулам (18.9)–(18.11), называются *коэффициентами Фурье для функции $f(x)$* , а ряд (18.8) с этими коэффициентами — *рядом Фурье для данной функции*.

Возникает вопрос, будет ли ряд Фурье, построенный для функции $f(x)$, сходиться, и если он сходится, то будет ли его сумма равна

данной функции $f(x)$. Чтобы ответить на него, вначале приведем следующее определение: говорят, что функция $f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле в интервале* $[-\pi, \pi]$, если:

- в этом интервале функция $f(x)$ непрерывна или имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- в указанном интервале функция $f(x)$ имеет лишь конечное число экстремумов.

Напомним, что $x = c$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы этой функции $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0)$ и $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$. График такой

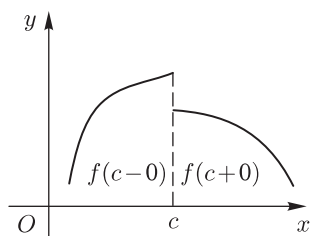


Рис. 18.1

функции имеет вид, представленный на рис. 18.1.

Без доказательства приведем следующую теорему.

Теорема 18.1. Если периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $[-\pi, +\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма $S(x)$ этого ряда равна

заданной функции во всех точках x , в которых $f(x)$ непрерывна, и $S(x)|_{x=c} = [f(c-0) + f(c+0)]/2$, если $x = c$ есть точка разрыва первого рода функции $f(x)$.

Пример. Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π задана в интервале $(-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = x$, $-\pi < x \leq \pi$. График этой функции представлен на рис. 18.2.

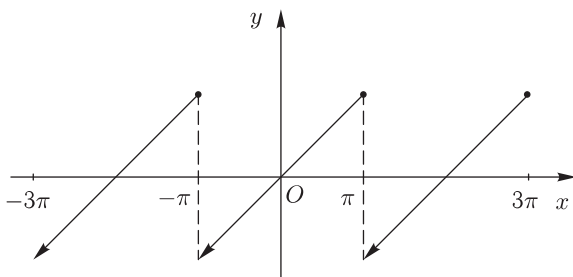


Рис. 18.2

Для других интервалов $(-5\pi, -3\pi]$, $(-3\pi, -\pi]$, $(\pi, 3\pi]$, $(3\pi, 5\pi]$, ... график получится сдвигом. Из рис. 18.2 видно, что π является точкой разрыва первого рода, причем предел слева $f(\pi-0) = \pi$, а предел

справа $f(\pi + 0) = -\pi$. Аналогично $x = -\pi$ также является точкой разрыва первого рода, для которой $f(-\pi - 0) = \pi$, $f(-\pi + 0) = -\pi$.

Функция $f(x) = x$ является непрерывной в интервале $-\pi < x < \pi$. Внутри указанного интервала функция возрастает и экстремумов не имеет. Таким образом, для рассматриваемой функции выполняются условия Дирихле в интервале $[-\pi, +\pi]$. Найдем по формулам (18.9)–(18.11) коэффициенты Фурье функции. По формуле (18.11)

имеем $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям (§ 12.5) $\int_a^b U \, dV = UV|_a^b - \int_a^b V \, dU$. Положим $U = x$, тогда $dV = \sin nx \, dx$, поэтому $dU = dx$ и $V = \int \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \int \sin nx \, d(nx) = -\frac{1}{n} \cos nx$.

Формула интегрирования по частям даст

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \right) \cos nx \, dx \right].$$

В правой части последней формулы вынесем множитель $-1/n$ за знак интеграла. Тогда оставшийся интеграл будет равен нулю согласно (18.1). Замечая, что $\cos n\pi = (-1)^n$, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cos(-n\pi) \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Итак,

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \quad (18.12)$$

По формулам (18.9), (18.10), действуя аналогично, найдем $a_0 = 0$, $a_n = 0$. Положив в (18.12) $n = 1, 2, 3, \dots$, получим $b_1 = 2/1$, $b_2 = -2/2$, $b_3 = 2/3$, ... Теперь ряд Фурье для рассматриваемой функции примет вид

$$2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx + \dots \quad (18.13)$$

Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ряд (18.13) сходится всюду. Так как в интервале $-\pi < x < \pi$ функция $f(x) = x$ непрерывна, то сумма ряда (18.13) равна этой функции, т. е. выполняется равенство

$$x = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx + \dots, \quad -\pi < x < \pi.$$

В точке $x = \pi$ все члены ряда (18.13) обращаются в нуль, поэтому сумма ряда равна нулю. С другой стороны, эта точка есть точка разрыва первого рода, и для нее $[f(\pi - 0) + f(\pi + 0)]/2 = (\pi - \pi)/2 = 0$, т. е. эта полусумма равна значению суммы ряда в точке $x = \pi$, что согласуется с утверждением теоремы 18.1.

§ 18.3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Пусть для функции $f(x)$ с периодом 2π справедливо разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (18.14)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (18.15)$$

Как известно, функция $\varphi(x)$ называется четной, если $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Покажем, что для такой функции

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) dx \quad (18.16)$$

С учетом свойств определенных интегралов имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx. \quad (18.17)$$

В первом интеграле правой части сделаем замену $x = -t$, тогда $dx = -dt$. Кроме того, $\varphi(x) = \varphi(-t) = \varphi(t)$ в силу четности. Учтя, что $t = -x$, заменим пределы интегрирования $x = -\pi$, $x = 0$ на соответствующие пределы $t = \pi$, $t = 0$. Рассматриваемый интеграл примет теперь вид $\int_{-\pi}^0 \varphi(x) dx = \int_{\pi}^0 \varphi(t)(-dt) = -\int_{\pi}^0 \varphi(t) dt = \int_0^{\pi} \varphi(t) dt$. Но определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому в последнем интеграле вместо t запишем x , тогда получим интеграл, совпадающий со вторым интегралом в правой части формулы (18.17), и тем самым придем к (18.16).

Функция $\psi(x)$ называется нечетной, если $\psi(-x) = -\psi(x)$. Действуя аналогично выводу формулы (18.16), можно показать, что для нечетной функции $\psi(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = 0. \quad (18.18)$$

Легко проверить, произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

В самом деле, для четной функции $\varphi(x)$ и нечетной функции $\psi(x)$ имеем $\varphi(x)\psi(x) = \varphi(-x)[- \psi(-x)] = -\varphi(-x)\psi(-x)$, т. е. произведение $\varphi(x)\psi(x)$ есть нечетная функция.

Аналогично проверяется, что произведение двух четных функций, как и произведение двух нечетных функций, есть функция четная.

Пусть $f(x)$ — нечетная функция, тогда $f(x)\cos nx$ — нечетная функция, так как $\cos nx$ — четная функция. В силу (18.18) в соотношениях (18.15) интегралы в формулах для a_0 , a_n обращаются в нуль, а интеграл для b_n согласно (18.16) можно заменить удвоенным интегралом от 0 до π , поскольку $f(x)\sin nx$ — четная функция. Итак, получим

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (18.19)$$

Значит, нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам.

Совершенно аналогично, если $f(x)$ — четная функция, то из (18.15) с учетом (18.16) и (18.18) получим

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0. \quad (18.20)$$

В ряде Фурье (18.14) остаются только косинусы.

§ 18.4. Ряды Фурье для функции с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$ имеет период $2l$, где $l > 0$, т. е. для любого x

$$f(x) = f(x + 2l). \quad (18.21)$$

Положим $x = lt/\pi$, тогда $t = \pi x/l$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(lt/\pi) = f(x). \quad (18.22)$$

Легко проверить, что $F(t)$ имеет период, равный 2π . В самом деле, в силу (18.21) имеем $F(t + 2\pi) = f(l(t + 2\pi)/\pi) = f(lt/\pi + 2l) =$

$= f(lt/\pi) = F(t)$. Пусть для функции $F(t)$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (18.23)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt. \quad (18.24)$$

В формулу (18.23) подставим $t = \pi x/l$, тогда ее левая часть $F(t)$ равна $f(x)$ согласно (18.22), так как $x = lt/\pi$; поэтому формула (18.23) даст

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x). \quad (18.25)$$

Получили нужное разложение функции $f(x)$ с периодом $2l$ в ряд Фурье, только здесь коэффициенты пока выражены формулами (18.24) через $F(t)$, а не через исходную функцию $f(x)$. Чтобы выразить эти коэффициенты через $f(x)$, сделаем в интегралах формул (18.24) замену $t = \pi x/l$, при этом $dt = (\pi/l) dx$. Кроме того, пределы интегрирования $t = -\pi$, $t = \pi$ заменим соответствующими пределами для x : $x = -l$, $x = l$ и учтем соотношение (18.22). При этом формулы (18.24) примут вид

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (18.26)$$

Формулы (18.25), (18.26) дают разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ с произвольным периодом $2l$. Если $f(x)$ является нечетной функцией, то по аналогии с (18.19) получим

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (18.27)$$

При этом разложение (18.25) будет содержать только синусы и примет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (18.28)$$

Если $f(x)$ является четной функцией, то по аналогии с формулами (18.20) получим

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0. \quad (18.29)$$

Следовательно, в разложении (18.25) останутся только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (18.30)$$

§ 18.5. Разложение функции, заданной в интервале, в ряд Фурье по синусам или косинусам

Пусть функция $f(x)$ задана в интервале $0 < x < l$. Будем считать, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $[0, l]$, принимая $f(0) = f(0+0)$, $f(l) = f(l-0)$. Заметим, что если x — любая точка этого интервала (как показано на рис. 18.3), то $-x$ — это точка интервала $(-l, 0)$. В интервале $(-l, 0)$ исходную функцию доопределим по закону $f(-x) = -f(x)$. Заданная таким образом функция будет нечетной, график ее симметричен относительно начала координат. Далее, предположим, что доопределенная указанным способом функция является $2l$ -периодической, иначе говоря, будем считать, что она продолжена периодически на всю действительную ось. Построенная таким образом функция $f(x)$ является нечетной и периодической с периодом $2l$. Такая функция разлагается в ряд Фурье по синусам по формуле (18.28)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 < x < l, \quad (18.31)$$

а коэффициенты ряда находятся по формулам (18.27). В формуле (18.31) x изменяется в интервале от 0 до l , т.е. эту формулу рассматриваем только в интервале задания функции $f(x)$. При

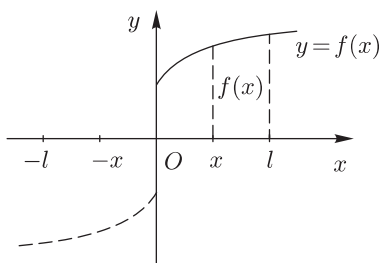


Рис. 18.3

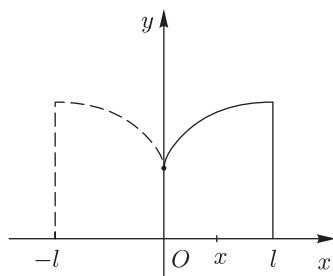


Рис. 18.4

этом коэффициенты b_n разложения выражаются только через значения функции в интервале $(0, l)$, в котором задается $f(x)$. Таким образом, формулы (18.27), (18.31) дают разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье, когда эта функция задана в интервале $(0, l)$.

Можно поступить иначе, продолжив исходную функцию в интервал $(-l, 0)$ по закону $f(-x) = f(x)$, при этом получим четную функцию (рис. 18.4). Далее функцию считаем периодической с периодом $2l$, поэтому можно воспользоваться формулами (18.29), (18.30). Тогда

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0, \quad (18.32)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{l} x, \quad 0 < x < l. \quad (18.33)$$

Формулы (18.32), (18.33) дают разложение функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, l)$, по косинусам, причем здесь используются значения $f(x)$ лишь в интервале $(0, l)$, где она задана.

Итак, одну и ту же функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0, l)$, можно разложить в ряд Фурье как по синусам, так и по косинусам.

Ясно, что разложения (18.31), (18.33) справедливы для точек x , в которых функция $f(x)$ непрерывна.

Пример. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = 1$, заданную в интервале $0 < x < l$.

Искомое разложение получим по формуле (18.31), при этом учтем, что $a_0 = a_n = 0$. Вычислим

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi}{l} x \right) \Big|_0^l = \frac{2}{n\pi} (-\cos n\pi + \cos 0) = \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ 4/(n\pi) & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак,

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x, \quad 0 < x < l.$$

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 19.1. Основные типы уравнений математической физики

В настоящей главе рассмотрены дифференциальные уравнения с частными производными, когда искомая функция зависит от нескольких аргументов.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right),$$

где a^2 — заданное положительное число, а $U(x, y, z, t)$ — искомая функция, встречается при изучении волновых процессов.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right),$$

где a^2 — заданная положительная постоянная, а $U(x, y, z, t)$ — искомая функция, используется при изучении процесса распространения тепла по телу.

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

где $U(x, y, z)$ — искомая функция, встречается при изучении распределения температуры в теле.

§ 19.2. Уравнение колебаний струны

Сначала запишем одно предварительное соотношение. Для этого рассмотрим функцию $U(x, t)$, дважды дифференцируемую по x и t . Для функции одного аргумента $f(x)$ производная, как известно, опре-

деляется по формуле $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; запишем ее для частной производной $\partial U(x, t)/\partial x$ при фиксированном t . Производная по x от последней есть вторая частная производная по x : $\partial^2 U(x, t)/\partial x^2$, так как аргумент t считается фиксированным. Получим

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial U(x + \Delta x, t)/\partial x - \partial U(x, t)/\partial x}{\Delta x}.$$

Здесь, как и в предыдущей формуле, предел справа берется при $\Delta x \rightarrow 0$, когда x — фиксированная величина (как и t). Таким образом, дробь, стоящая под знаком предела, есть функция от Δx . Эта функция при $\Delta x \rightarrow 0$ имеет предел $\partial^2 U(x, t)/\partial x^2$, поэтому при малых Δx она мало отличается от своего предела, т. е.

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial U(x + \Delta x, t)/\partial x - \partial U(x, t)/\partial x}{\Delta x}.$$

Умножив это приближенное соотношение на Δx , при малых Δx получим приближенное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \quad (19.1)$$

Струной называется гибкая упругая нить. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ струна занимает положение отрезка оси Ox , соединяющего точки $x = 0$, $x = l$; струна натянута с силой, модуль которой обозначим через T и будем считать известной. Концы струны закреплены в указанных точках оси Ox . Выведем струну из этого начального положения (рис. 19.1). Предоставим струну самой себе, под действием силы натяжения она начнет колебаться в плоскости OxU . Нужно изучить этот колебательный процесс.

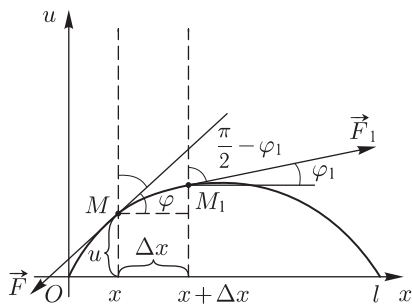


Рис. 19.1

струны, когда приближенно можно считать, что точка M движется по вертикали, т. е. в процессе движения она имеет одну и ту же абсциссу x .

Пусть U — ордината точки M , по предположению являющаяся функцией от x , так как каждая точка струны имеет свою ординату. Кроме того, ордината U зависит от времени t , так как точка M движется и с течением времени ее ордината U изменяется. Таким образом, U

из этого начального положения (рис. 19.1). Предоставим струну самой себе, под действием силы натяжения она начнет колебаться в плоскости OxU . Нужно изучить этот колебательный процесс.

Пусть M — произвольная точка струны с абсциссой x . Будем рассматривать малые колебания

есть функция двух переменных: $U = U(x, t)$. При фиксированном x эта функция характеризует движение точки M с абсциссой x с течением времени t по вертикали. При фиксированном t эта функция характеризует распределение ординат точек струны по интервалу $0 < x < l$, т. е. форму струны в рассматриваемый момент времени t . Зафиксируем t и найдем производную U по x в точке $M(x, U)$:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (19.2)$$

где φ — угол, образованный с осью Ox касательной к струне в ее точке M , согласно геометрическому смыслу производной $U'_x = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$, так как t — фиксированная величина. Аналогично для точки M_1 с абсциссой $x + \Delta x$ имеем

$$\frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (19.3)$$

Для простоты будем считать $\Delta x > 0$. Рассмотрим малое колебание струны, когда угол φ мал. Тогда $\sin \varphi$ тоже мал, так как $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$, т. е. $\sin \varphi$ — бесконечно малая функция того же порядка, что и φ . В формуле $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ отбросим бесконечно малую функцию второго порядка, т. е. $\sin^2 \varphi$, и получим $\cos \varphi \approx 1$. Поэтому $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, и в формулах (19.2), (19.3) тангенс можно заменить на синус. После этой замены из соотношения (19.3) вычтем соотношение (19.2) почленно. Разность в левой части заменим по формуле (19.1) и получим

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Delta x = \sin \varphi_1 - \sin \varphi. \quad (19.4)$$

В силу малости отклонений будем считать, что по модулю сила натяжения во всех сечениях одинакова и приближенно равна T . Кроме того, будем считать (и это естественное предположение), что сила натяжения направлена по касательной к струне для рассматриваемого ее сечения.

Пусть $\vec{F}$ — сила, с которой на участок MM_1 действует часть струны слева от M . Эта сила приложена в точке M и направлена по касательной к струне в этой точке, модуль силы $|\vec{F}| = T$.

Пусть $\vec{F}_1$ — сила, с которой на участок MM_1 действует часть струны справа от M_1 , $|\vec{F}_1| = T$. Нам в дальнейшем понадобятся проекции этих сил на ось U . Так как проекция вектора на ось равна его модулю, умноженному на косинус угла между вектором и осью, то проекция $\vec{F}_1$ на ось U равна $F_{1U} = |\vec{F}_1| \cos(\pi/2 - \varphi_1) = T \sin \varphi_1$. Аналогично проекция силы $\vec{F}$ на ось U равна $F_U = |\vec{F}| \cos(\pi/2 + \varphi) = -T \sin \varphi$.

Отсюда $F_{1U} + F_U = T(\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$. Справа разность $\sin \varphi_1 - \sin \varphi$ заменим по формуле (19.4) и получим

$$F_{1U} + F_U = T \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \quad (19.5)$$

В силу малости колебаний струны приближенно можно считать, что длина участка MM_1 струны в процессе колебаний не изменяется, остается постоянной и равной Δx .

Пусть ρ — линейная плотность струны, т.е. масса единицы длины струны. Эту плотность будем считать постоянной. Тогда для участка MM_1 его масса $m = \rho \Delta x$. В силу малости колебаний приближенно можно считать, что все точки участка MM_1 имеют одну и ту же скорость, равную скорости $\vec{V}$ точки M , и одно и то же ускорение, равное ускорению $\vec{W}$ точки M . Участок MM_1 массой m движется с ускорением $\vec{W}$ под действием сил $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ (силой тяжести пренебрегаем). Согласно второму закону Ньютона $m\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}$. Это векторное соотношение спроецируем на ось U и получим

$$m \cdot W_U = F_{1U} + F_U. \quad (19.6)$$

Но, как известно из кинематики, проекция W_U вектора $\vec{W}$ на ось U равна второй производной по времени от ординаты точки M :

$$W_U = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}. \quad (19.7)$$

Аналогично проекция V_U вектора $\vec{V}$ на ось U равна

$$V_U = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}. \quad (19.8)$$

В (19.6) подставим выражение (19.7) для W_U , в правую часть вместо суммы проекций сил подставим выражение (19.5) и учтем, что $m = \rho \Delta x$. Получим $\rho \Delta x \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = T \Delta x \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$. Сократим обе части этого соотношения на Δx . Обозначим $T/\rho = a^2$, тогда

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}. \quad (19.9)$$

Это и есть *уравнение колебаний струны*. Здесь a^2 — известное положительное число.

Если решать уравнение без дополнительных условий, то его решение будет содержать не только произвольные постоянные, но и произвольные функции. Для получения однозначного решения задают дополнительные условия, называемые *граничными (краевыми) и начальными*.

Пусть концы струны закреплены в точках $x = 0$, $x = l$ оси Ox , тогда эти концы имеют ординату $U = 0$, т. е.

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0. \quad (19.10)$$

Эти условия называются *краевыми (граничными)*.

Пусть значения функции $U(x, t)$ при $t = 0$ заданы в виде $U|_{t=0} = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, заданная в интервале $[0, l]$. Эта функция определяет форму струны в начальный момент времени $t = 0$. Кроме того, зададим величину $\partial U(x, t)/\partial t$ при $t = 0$ в виде функции $F(x)$. Получим

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad (19.11)$$

здесь $F(x)$ — тоже непрерывная функция, заданная в интервале $[0, l]$. Эта функция, как видно из (19.8), дает распределение проекций скоростей точек струны на ось U в начальный момент времени t . Условия

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad 0 < x < l, \quad (19.12)$$

называются *начальными условиями* для уравнения (19.9). Можно показать, что уравнение (19.9) имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (19.10) и начальным условиям (19.12). В этом убедимся в дальнейшем. Физический смысл этого свойства заключается в том, что, зная форму струны в начальный момент времени $t = 0$ и распределение скоростей точек струны в этот момент времени, можно найти функцию $U(x, t)$, характеризующую процесс колебаний струны. В силу условий (19.10) обе функции $f(x)$, $F(x)$ должны обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = l$.

§ 19.3. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Найдем решение уравнения колебаний струны (19.9), удовлетворяющее краевым и начальным условиям (19.10) и (19.12). Будем искать ненулевое решение этого уравнения, так как нулевое решение $U(x, t) \equiv 0$ тривиально (струна не колеблется); кроме того, такое решение не может удовлетворять начальным условиям (19.12), если в них $f(x)$ и/или $F(x)$ не равны тождественно нулю. Будем пока искать ненулевое решение уравнения (19.9) с краевыми условиями (19.10), отвлекаясь от начальных условий (19.12). Это решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от x , а другая от t , т. е. в виде

$$U(x, t) = X(x)T(t). \quad (19.13)$$

Потребуем, чтобы это произведение было решением уравнения (19.9). Тогда $X(x)T'''(t) = a^2 X''(x)T(t)$. Отсюда, поделив на $a^2 X(x)T(t)$, получим $\frac{T'''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$. Здесь правая часть есть функция от x , т.е. она не зависит от t , но тогда левая часть, являющаяся функцией от t , тоже не зависит от t . Следовательно, она, как и правая часть, есть постоянная величина. Примем, что эта постоянная отрицательна, и обозначим ее $-\lambda^2$, где λ — вещественная постоянная. Тогда

$$\frac{T'''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (19.14)$$

(Если принять, что указанная постоянная неотрицательна, то, проведя рассуждения, аналогичные использованным ниже, придем к заключению, что искомое решение вида (19.13), удовлетворяющее условиям (19.10), будет нулевым.)

Приравняв постоянной $-\lambda^2$ сначала первую дробь в (19.14), затем вторую, получим два соотношения

$$T'''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (19.15)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (19.16)$$

Уравнение (19.16) есть линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, как мы знаем, сводится к нахождению корней характеристического уравнения $k^2 + \lambda^2 = 0$. Корни этого уравнения равны $k_{1,2} = \pm \lambda i$, поэтому общее решение уравнения (19.16) определяется формулой

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (19.17)$$

где A, B — произвольные постоянные. Аналогично записывается решение уравнения (19.15):

$$T(t) = C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t, \quad (19.18)$$

где C, D — произвольные постоянные.

Выражения (19.17), (19.18) нужно подставить в (19.13). Кроме того, мы должны потребовать, чтобы произведение (19.13) удовлетворяло краевым условиям (19.10), т.е. чтобы выполнялись условия $X(0)T(t) = 0$, $X(l)T(t) = 0$. Если здесь примем, что $T(t) = 0$ при всех t , то согласно (19.13) получим нулевое решение, которое нас не удовлетворяет. Следовательно, мы должны считать, что в предыдущих соотношениях обращаются в нуль другие множители: $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Согласно (19.17) эти условия записываются так:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0, \quad A \cos \lambda l + B \sin \lambda l = 0. \quad (19.19)$$

Из первого условия (19.19) следует, что $A = 0$. Тогда второе условие примет вид

$$B \sin \lambda l = 0. \quad (19.20)$$

Если здесь примем $B = 0$, то согласно (19.17) получим $X = 0$ при всех x , так как $A = 0$. Опять получим нулевое решение. Следовательно, нужно считать, что $B \neq 0$, тогда (19.20) даст $\sin \lambda l = 0$, поэтому

$$\lambda l = n\pi, \quad (19.21)$$

где n — целое число. Здесь мы должны считать $n \neq 0$, так как $\lambda \neq 0$. Кроме того, можем считать, что n принимает только положительное значение: при отрицательном значении n изменится знак λ , и в формуле (19.17) этот минус можно вынести за знак синуса и отнести к произвольной постоянной B , т.е. здесь получим прежний вид решения (при этом помним, что $A = 0$). Сказанное справедливо и для функции $T(t)$ в (19.18), так как косинус — функция четная.

Итак, считаем, что в (19.21) n — целое положительное число. Теперь из формулы (19.21) найдем $\lambda = n\pi/l$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Эти найденные значения λ и $A = 0$ подставим в формулы (19.17), (19.18), полученные выражения подставим в (19.13) и будем иметь

$$U(x, t) = B \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C \cos a \frac{n\pi}{l} t + D \sin a \frac{n\pi}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим $BC = \tilde{C}$, $BD = \tilde{D}$. Кроме того, последняя формула для каждого n будет давать свою функцию от x , t , которую обозначим $U_n(x, t)$. Эта функция будет иметь свои постоянные $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ для каждого n , которые обозначим соответственно C_n , D_n . Итак,

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos a \frac{n\pi}{l} t + D_n \sin a \frac{n\pi}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19.22)$$

Эта функция по построению удовлетворяет уравнению (19.9) и краевым условиям (19.10). Легко проверить, что сумма двух таких функций тоже удовлетворяет уравнению (19.9) и краевым условиям (19.10). Учитывая это, составим ряд из этих функций, сумму ряда обозначим $U(x, t)$:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos a \frac{n\pi}{l} t + D_n \sin a \frac{n\pi}{l} t \right). \quad (19.23)$$

Будем считать, что этот ряд допускает двукратное почленное дифференцирование по x , а также по t . Продифференцируем почленно (19.23) по x два раза, затем по t два раза и подставим полученные выражения в (19.9). Это соотношение будет выполняться, так как оно выполняется для каждого члена ряда (19.23). Таким образом, функция (19.23) есть решение уравнения (19.9). Кроме того, эта функция удовлетворяет

краевым условиям (19.10), так как этим условиям удовлетворяет каждый член выражения (19.23).

Остается добиться выполнения начальных условий (19.12) для функции (19.23), при этом мы воспользуемся тем, что эта функция содержит бесконечное число коэффициентов C_n и D_n . Потребуем, чтобы функция (19.23) удовлетворяла первому начальному условию (19.12): положим $t = 0$, тогда левая часть будет равна $f(x)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (19.24)$$

Отсюда видно, что правая часть (19.24) есть разложение по синусам функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, l)$. Как мы знаем, при этом коэффициент разложения C_n определяется формулой

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (19.25)$$

Продифференцируем по t соотношение (19.23) и в полученном соотношении положим $t = 0$, тогда левая часть будет равна $F(x)$ согласно (19.12), поэтому $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{n\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x$. Здесь коэффициент $a \frac{n\pi}{l} D_n$ определяется так же, как в предыдущем случае:

$$\frac{an\pi D_n}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (19.26)$$

По формулам (19.25) и (19.26) для всех $n = 1, 2, \dots$ найдем коэффициенты C_n , D_n , подставим их в (19.23) и определим искомое решение уравнения (19.9), которое удовлетворяет и начальным условиям.

Можно показать, что если $f(x)$, $F(x)$ таковы, что их производные $f''(x)$, $F'''(x)$ удовлетворяют условию Дирихле в интервале $[0, l]$ и имеют место соотношения

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0, \quad F(0) = F(l) = 0,$$

то ряд (19.23) с коэффициентами, определяемыми по формулам (19.25), (19.26), допускает двукратное почленное дифференцирование как по x , так и по t . Доказательство этого утверждения опускается.

§ 19.4. Уравнение теплопроводности. Начальные и краевые (граничные) условия. Стационарный случай. Задача Дирихле

В пространстве $Oxyz$ задано тело, занимающее область V , ограниченную поверхностью S (рис. 19.2). Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка этого тела, $W(\xi, \eta, \theta)$ — точка поверхности S , $U(x, y, z, t)$ — температура тела в точке M в момент времени t . Пусть эта функция задана во всей области V (для всего тела) в любой момент времени t . При фиксированном t эта функция характеризует распределение температуры по всему телу (по всей области V), а при фиксированных координатах x, y, z точки M функция $U(x, y, z, t)$ характеризует изменение температуры точки M с течением времени. Можно показать, что эта функция удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, называемому *уравнением теплопроводности* в пространстве:

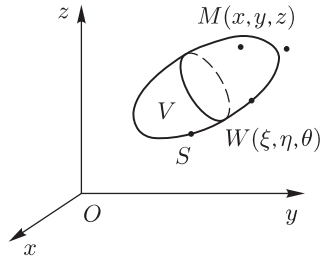


Рис. 19.2

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (19.27)$$

где a — известная постоянная. Это уравнение приводим без вывода.

Если уравнение (19.27) решать непосредственно без дополнительных условий, то его решение будет неопределенным — оно будет зависеть не только от произвольных постоянных (как это было в обыкновенных дифференциальных уравнениях), но еще и от произвольных функций. Поэтому, чтобы получить определенное решение, задают начальные и краевые условия:

— значения $U(x, y, z, t)$ в начальный момент времени $t = 0$

$$U|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (19.28)$$

где функция $\varphi(x, y, z)$ задана по всей области V и характеризует распределение температуры по всему телу в исходный момент времени $t = 0$;

— значения $U(x, y, z, t)$ в любой рассматриваемый момент времени t на всей поверхности S

$$U|_S = \psi(\xi, \eta, \theta, t); \quad (19.29)$$

где функция $\psi(\xi, \eta, \theta, t)$ характеризует распределение температуры по всей поверхности S в любой момент времени t .

Можно показать, что уравнение (19.27) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (19.28) и краевым условиям (19.29). Физически это означает, что, зная распределение температуры $\varphi(x, y, z)$ по области V в момент времени $t = 0$ и распределение температуры $\psi(\xi, \eta, \theta, t)$ по поверхности S в момент времени t , можно найти распределение температуры $U(x, y, z, t)$ по области V в момент времени t .

Если функция U не зависит от времени, т. е. имеет вид $U(x, y, z)$, то в этом случае в уравнении (19.27) производная $\partial U / \partial t = 0$, и уравнение (19.27) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (19.30)$$

Получили *уравнение Лапласа*. Теперь начальное условие (19.28) теряет смысл, так как U не зависит от t , а граничное условие (19.29) примет вид

$$U|_S = \psi(\xi, \eta, \theta). \quad (19.31)$$

Можно показать, что уравнение (19.30) имеет единственное решение $U(x, y, z)$, удовлетворяющее краевому условию (19.31). Физически это означает, что, зная распределение температуры $\psi(\xi, \eta, \theta)$ по всей поверхности S , можем найти функцию $U(x, y, z)$ — распределение температуры по всему телу, т. е. по всей области V .

Задача о нахождении решения уравнения Лапласа (19.30) по граничному условию (19.31) называется *задачей Дирихле*.

§ 19.5. Задача Дирихле для круга

Пусть в плоскости Oxy задан круг E радиуса R с границей L и центром в начале координат. В этом круге требуется найти решение $U = \bar{u}(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (19.32)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$U|_L = \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (19.33)$$

где $\tilde{f}(\xi, \eta)$ — функция, заданная всюду на окружности L — границе рассматриваемого круга E .

Искомую функцию $U = \bar{u}(x, y)$ и заданную функцию $\tilde{f}(\xi, \eta)$ будем считать непрерывными соответственно в круге E и на окружности L .

В плоскости Oxy введем полярную систему координат. Пусть (r, φ) — полярные координаты точки M с декартовыми координатами (x, y) . При этом φ — угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки, а $r = OM$. Из рис. 19.3

видно, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Значит, $x^2 + y^2 = r^2$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$. Поэтому

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi, \quad (19.34)$$

где $k = 0$ при $x > 0$, а при $x < 0$ положим $k = 1$ для $y > 0$ и $k = -1$ для $y < 0$, тогда $-\pi < \varphi \leq \pi$. Эти формулы выражают полярные координаты точки M через ее декартовы координаты.

Искомую функцию $U = \bar{u}(x, y)$ будем рассматривать как сложную функцию: $U = U(r, \varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) + k\pi$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (19.35)$$

Здесь $\partial r / \partial x$, $\partial \varphi / \partial x$ находятся дифференцированием функций (19.34). Возьмем частную производную от (19.35)

по x (учтем, что в правой части слагаемые представляют произведения):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (19.36)$$

Заменив в (19.35) величину U на $\partial U / \partial r$, запишем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Аналогично после замены в (19.35) величины U на $\partial U / \partial \varphi$ получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Эти выражения подставим в (19.36) и найдем $\partial^2 U / \partial x^2$. Аналогично запишем $\partial^2 U / \partial y^2$. Подставив найденные выражения в (19.32) и проведя необходимые преобразования, получим уравнение Лапласа в полярных координатах

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (19.37)$$

Для искомой функции $U = U(r, \varphi)$ краевое условие (19.33) запишем в виде $U|_L = \tilde{f}(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ (учли, что $\xi = R \cos \varphi$, $\eta = R \sin \varphi$). Но для точек L полярная координата $r = R$, поэтому последнее условие можно записать так

$$U|_{r=R} = f(\varphi), \quad (19.38)$$

где $f(\varphi) = \tilde{f}(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ — непрерывная функция, заданная всюду на окружности L . Чтобы найти решение уравнения (19.37) с граничным

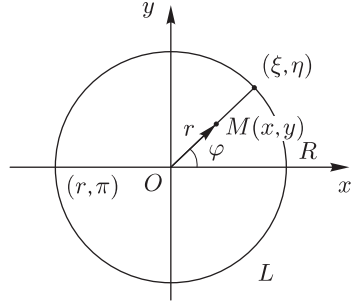


Рис. 19.3

условием (19.38), используем, как и в случае уравнения колебания струны, метод разделения переменных. Решение уравнения (19.37) будем искать в виде произведения

$$U(r, \varphi) = \Phi(\varphi)T(r) \quad (19.39)$$

двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Потребуем, чтобы функция $U(r, \varphi)$ удовлетворяла уравнению (19.37):

$$r^2\Phi(\varphi)T''(r) + r\Phi(\varphi)T'(r) + \Phi''(\varphi)T(r) = 0.$$

Разделив обе части на $\Phi(\varphi)T(r)$, получим

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2T''(r) + rT'(r)}{T(r)}. \quad (19.40)$$

Рассуждая, как и в случае уравнения колебания струны, можно показать, что каждая из частей в (19.40) есть постоянная. Примем ее отрицательной и обозначим $-\lambda^2$ (если принять эту постоянную положительной, то, поступив аналогично тому, как изложено ниже, придем к нулевому решению; случай $\lambda = 0$ будет рассмотрен отдельно). Приравняв каждую из частей (19.40) $-\lambda^2$, получим

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0, \quad (19.41)$$

$$r^2T''(r) + rT'(r) - \lambda^2T(r) = 0. \quad (19.42)$$

Уравнение (19.41) имеет решение $\Phi(\varphi) = \tilde{A} \cos \lambda\varphi + \tilde{B} \sin \lambda\varphi$, где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — произвольные постоянные. Уравнение (19.42) имеет два частных решения: $T_1(r) = r^\lambda$, $T_2(r) = r^{-\lambda}$, в чем легко убедиться, подставив каждую из этих функций в (19.42). Они образуют фундаментальную систему в интервале $(0, R)$, поэтому общее решение для (19.42) имеет вид

$$T(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}, \quad (19.43)$$

где C , D — произвольные постоянные. Подставим найденные выражения в (19.39) и получим

$$U(r, \varphi) = (\tilde{A} \cos \lambda\varphi + \tilde{B} \sin \lambda\varphi)(Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}).$$

Для каждого значения λ эта формула определяет соответствующую функцию. В связи с этим величины U , $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, C , D будем снабжать индексом λ , тогда

$$U_\lambda(r, \varphi) = (\tilde{A}_\lambda \cos \lambda\varphi + \tilde{B}_\lambda \sin \lambda\varphi)(C_\lambda r^\lambda + D_\lambda r^{-\lambda}).$$

По построению эта функция удовлетворяет уравнению (19.37). В круге E точки $(r, -\pi)$, (r, π) совпадают. Поэтому $U_\lambda(r, -\pi) = U_\lambda(r, \pi)$. Следовательно, эта функция должна иметь период 2π по аргументу φ . Поэтому λ должно быть целым числом, т. е. $\lambda = n$ и

$$U_n(r, \varphi) = (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \quad (19.44)$$

В (19.44) можно считать, что n принимает положительные значения (будем помнить, что пока считаем $\lambda = n \neq 0$), так как при отрицательных n решение (19.44) останется тем же в силу того, что входящие в него постоянные являются произвольными. В самом деле, при замене n на $-n < 0$ в формуле (19.44) постоянные C, D поменяются ролями, $\cos n\varphi$ не изменится, $\tilde{B} \sin(-n\varphi) = (-\tilde{B}) \sin n\varphi$, где $(-\tilde{B})$ — произвольная постоянная. Кроме того, в (19.44) должно быть $D_n = 0$, так как в противном случае слагаемое $D_n r^{-n} \rightarrow \infty$, когда $r \rightarrow 0$, и функция (19.44) не будет непрерывной в точке $(0, 0)$.

Введем обозначения $\tilde{A}_n C_n = \alpha_n$, $\tilde{B}_n C_n = \beta_n$ и получим

$$U_n(r, \varphi) = (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) r^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19.45)$$

До сих пор мы считали, что $\lambda = n \neq 0$. При $\lambda = 0$ уравнения (19.41), (19.42) соответственно примут вид $\Phi''(\varphi) = 0$, $r^2 T''(r) + r T'(r) = 0$. Решение первого из этих уравнений находится непосредственно интегрированием, второе уравнение приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными для искомой функции $Q(r) = T'(r)$. Определив $Q(r) = D_0/r$, найдем $T(r) = C_0 + D_0 \ln r$, $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi$, где C_0, D_0, A_0, B_0 — произвольные постоянные. Эти функции подставим в (19.39): $U_0(r, \varphi) = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r)$. Здесь необходимо взять $B_0 = 0$, чтобы функция U_0 имела период 2π по φ . Кроме того, должно быть $D_0 = 0$, так как $D_0 \ln r \rightarrow \infty$ при $D_0 \neq 0$ и $r \rightarrow 0$. Значит, $U_0(r, \varphi) = A_0 C_0$. Постоянную справа обозначим $A_0 C_0 = \alpha_0/2$, тогда $U_0 = \alpha_0/2$.

Функции (19.45) и U_0 по построению являются решениями уравнения (19.37). Поэтому их сумма также является решением этого уравнения. Учитывая это, образуем из них ряд. Обозначим сумму ряда

$$U(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) r^n. \quad (19.46)$$

Пусть этот ряд допускает двукратное почленное дифференцирование по r , а также по φ ; подставим производные от функции (19.46) в (19.37) и убедимся, что эта функция является решением уравнения (19.37), так как каждый член ряда (19.46) удовлетворяет уравнению (19.37). Потребуем, чтобы решение (19.46) удовлетворяло краевому условию (19.38). Положим $r = R$, тогда левая часть (19.46) должна быть равна $f(\varphi)$. Следовательно,

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n R^n \cos n\varphi + \beta_n R^n \sin n\varphi).$$

Очевидно, что правая часть есть ряд Фурье для функции $f(\varphi)$ с периодом 2π . Поэтому его коэффициенты

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$\beta_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

По этим формулам найдем все коэффициенты ряда (19.46). Подставив их в (19.46), найдем искомое решение уравнения (19.37), удовлетворяющее краевому условию (19.38).

Без обоснования отметим, что построенный ряд (19.46) допускает почленное двукратное дифференцирование как по r , так и по φ .

§ 19.6. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье

Пусть стержень совпадает с отрезком оси Ox , соединяющим точки $x = 0$ и $x = l$. Будем считать, что на концах стержня поддерживается нулевая температура, в начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры задано в виде функции $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, производная которой удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $[0, l]$. Требуется найти распределение температуры по стержню в любой момент времени t , т. е. функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (19.47)$$

а также краевым условиям

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0 \quad (19.48)$$

и начальному условию

$$U(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (19.49)$$

Как и выше, частное решение уравнения (19.47) ищем в виде

$$U(x, t) = X(x)T(t). \quad (19.50)$$

Подставив это выражение в уравнение (19.47), приходим к соотношению

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

в котором обе части должны быть равны постоянной. Эту постоянную, как и выше, будем считать отрицательной и обозначим через $-\lambda^2$. Тогда

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

поэтому

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (19.51)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (19.52)$$

Учитывая, что функция (19.50) должна удовлетворять условиям (19.48), приходим к соотношениям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Следовательно, функция $X(x)$ удовлетворяет тому же уравнению и тем же условиям, что и в случае уравнения колебаний струны, поэтому $\lambda = n\pi/l$,

$$X(x) = B \sin \lambda x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19.53)$$

При указанном значении λ решение уравнения (19.51) примет вид

$$T(t) = C \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19.54)$$

Выражения (19.53) и (19.54) подставим в формулу (19.50). Обозначив $BC = b_n$, $U(x, t) = U_n(x, t)$, будем иметь

$$U_n(x, t) = b_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda = 0$ уравнения (19.51), (19.52) дают нулевое решение $U(x, t) \equiv 0$, тот же результат будет при замене $-\lambda^2$ на λ^2 . Из найденных функций составим ряд

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \left[- (n\pi a/l)^2 t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (19.55)$$

Потребуем, чтобы полученная функция удовлетворяла условию (19.49). Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Здесь правая часть есть ряд Фурье по синусам для функции $\varphi(x)$ в интервале $(0, l)$, поэтому

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Подставив найденные коэффициенты b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, в формулу (19.55), получим функцию $U(x, t)$, которая по построению удовлетворяет условиям (19.48), (19.49).

Можно показать, что найденный ряд (19.55) можно почленно продифференцировать два раза по x (дифференцируемость по t очевидна). Так как каждый член этого ряда удовлетворяет уравнению (19.47), то сумма ряда $U(x, t)$ также удовлетворяет уравнению (19.47). Таким образом, формула (19.55) определяет искомое решение.

ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 20.1. Определение и свойства интеграла по поверхности

В пространстве $Oxyz$ задана поверхность S , на ней задана функция $f(x, y, z)$. Это означает, что в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности известно значение этой функции $f(x, y, z) = f(M)$. Будем считать что эта функция непрерывна, т.е. $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ для любой фиксированной точки M_0 поверхности S . Разобьем поверхность S на n частей. Обозначим эти части и их площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (рис. 20.1). Внутри i -й части с площадью $\Delta\sigma_i$ возьмем произвольную

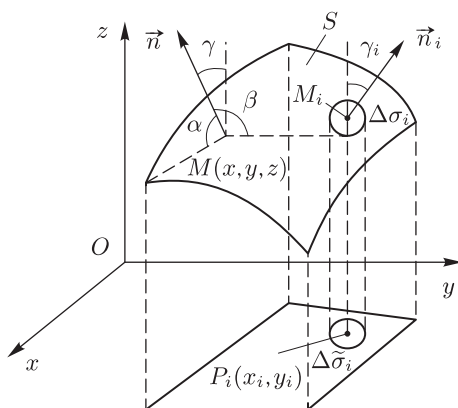


Рис. 20.1

точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ поверхности S , вычислим значение $f(M_i)$, т.е. найдем $f(x_i, y_i, z_i)$, затем умножим его на площадь $\Delta\sigma_i$. Проделаем аналогичные действия со всеми частями, на которые разбили S , и, сложив, получим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta \sigma_i. \quad (20.1)$$

Назовем ее *интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ и поверхности S* , на которой функция задана. Пусть $\max d_i$ — наибольший из всех диаметров частей, на которые мы разбили S . Число делений n устремим к бесконечности так, чтобы $\max d_i$ стремился к нулю и каждая часть $\Delta \sigma_i$ стягивалась в точку. Если при этом предел суммы (20.1) не зависит ни от способа разбиения S , ни от выбора точек M_i , то этот предел называется *интегралом по поверхности S от функции $f(x, y, z) = f(M)$* и обозначается

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_S f(M) d\sigma.$$

Таким образом, по определению

$$\iint_S f(M) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta \sigma_i. \quad (20.2)$$

Свойства интеграла по поверхности аналогичны свойствам кратных интегралов (§ 13.6). Например, для интеграла суммы имеет место свойство

$$\iint_S [f(M) + \varphi(M)] d\sigma = \iint_S f(M) d\sigma + \iint_S \varphi(M) d\sigma.$$

Если поверхность S разбита на две части S_1 и S_2 , т. е. $S = S_1 + S_2$, то

$$\iint_S f(M) d\sigma = \iint_{S_1} f(M) d\sigma + \iint_{S_2} f(M) d\sigma.$$

Определение интегралов по поверхности остается в силе и в случае, когда поверхность S является замкнутой, т. е. ограничивает некоторую часть пространства (например, имеет форму сферы или эллипсоида).

§ 20.2. Вычисление проекций вектора нормали к поверхности

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана поверхность S и D_{xy} — проекция этой поверхности на плоскость Oxy при проецировании параллельно оси Oz (рис. 20.2). Пусть поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y)$, причем функция $\varphi(x, y)$ является однозначной в области D_{xy} . Это означает, что для любой точки $P(x, y)$ области D_{xy} прямая, проходящая через нее параллельно оси Oz , пересекает поверхность S только в одной точке $M(x, y, z)$, аппликата z которой равна $\varphi(x, y)$ со-

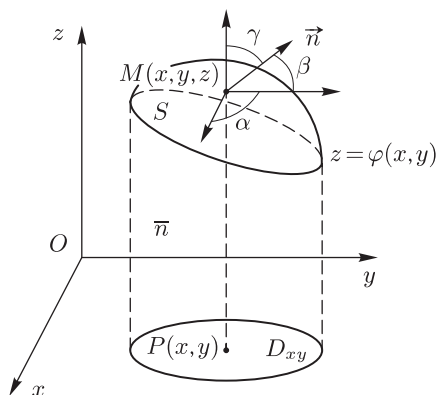


Рис. 20.2

гласно уравнению поверхности. Будем считать, что всюду в D_{xy} функция $\varphi(x, y)$ непрерывна со своими частными производными $\varphi'_x(x, y)$, $\varphi'_y(x, y)$.

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в точке $M(x, y, z)$ и образующий острый угол γ с осью Oz . С изменением положения точки M изменяется γ , т.е. γ есть функция координат x, y, z точки M : $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Пусть α, β — углы, которые образует $\vec{n}$ с осями соответственно Ox, Oy . Ясно, что эти углы — тоже функции от x, y, z : $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$. Тогда вектор $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Покажем, что для угла γ справедлива формула

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{[\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2 + 1}}. \quad (20.3)$$

Здесь частные производные φ'_x и φ'_y вычислены в точке $M(x, y, z)$, но можно считать, что они вычислены в точке P , так как абсциссы и ординаты точек P и M одинаковы, а аппликата z в (20.3) не входит. Для обоснования (20.3) учтем, что вектор $\vec{N}$, направленный по нормали к поверхности S в точке M , равен $\vec{N} = (-\varphi'_x(x, y), -\varphi'_y(x, y), 1)$ (§ 13.10). Длина этого вектора

$$|\vec{N}| = \sqrt{[\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2 + 1}. \quad (20.4)$$

Проекция рассматриваемого вектора на ось z , равная 1, с другой стороны, равна длине вектора $\vec{N}$, умноженной на $\cos \gamma$. Таким образом, $1 = |\vec{N}| \cdot \cos \gamma$, где γ — угол, образуемый с осью Oz вектором $|\vec{N}|$. Отсюда видно, что $\cos \gamma > 0$, т.е. γ — острый угол. Это означает,

что вектор $\vec{N}$ направлен, как и $\vec{n}$. Поэтому $\vec{N} = |\vec{N}| \cdot \vec{n}$ согласно правилу умножения вектора на число. Отсюда $\vec{n} = \vec{N}/|\vec{N}|$. Но при умножении вектора на число на это число умножатся все его проекции. Следовательно, $\vec{n} = (-\varphi'_x/|\vec{N}|, -\varphi'_y/|\vec{N}|, 1/|\vec{N}|)$. Но, с другой, стороны $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Следовательно,

$$\cos \alpha = -\frac{\varphi'_x}{|\vec{N}|}, \quad \cos \beta = -\frac{\varphi'_y}{|\vec{N}|}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\vec{N}|}. \quad (20.5)$$

Подставив (20.4) в последнюю формулу (20.5), получим (20.3).

Отметим, что первые две формулы в (20.5) с учетом последней можно записать так: $\cos \alpha = -\varphi'_x \cos \gamma$, $\cos \beta = -\varphi'_y \cos \gamma$. Таким образом мы можем вычислить косинусы углов α, β, γ , образуемых с осями координат единичным вектором $\vec{n}$, направленным по нормали к поверхности S в точке $M(x, y, z)$ этой поверхности, когда поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y)$.

§ 20.3. Вычисление интеграла по поверхности

Пусть на поверхности S задана непрерывная функция $f(x, y, z)$ и поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y)$, где функция $\varphi(x, y)$ определена в области D_{xy} и удовлетворяет условиям, указанным в § 20.2. Поверхность S разобьем на n частей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Внутри части $\Delta\sigma_i$ возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. В ней вычислим значение заданной функции, т. е. найдем $f(x_i, y_i, z_i)$, и умножим это значение на $\Delta\sigma_i$. Проведем аналогичную операцию со всеми частями, на которые разбили поверхность S , и, сложив, образуем интегральную сумму (20.1). Тогда интеграл по поверхности S от функции $f(x, y, z)$ определяется формулой (20.2).

Пусть $\vec{n}_i$ — единичный вектор, который направлен по нормали к поверхности S в точке M_i и образует с осью Oz угол γ_i . Косинус этого угла определяется по формуле (20.3), записанной для точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$:

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{[\varphi'_x(x_i, y_i)]^2 + [\varphi'_y(x_i, y_i)]^2 + 1}}. \quad (20.6)$$

В точке M_i проведем касательную плоскость к поверхности S . Через границу области $\Delta\sigma_i$ проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz (рис. 20.1). Эта поверхность на касательной плоскости отсечет фигуру $\Delta\sigma_i^*$, а в области D_{xy} отсечет область площадью $\Delta\tilde{\sigma}_i$. Ясно, что $\Delta\tilde{\sigma}_i$ есть проекция на плоскость Oxy фигуры $\Delta\sigma_i$ поверхности S , а также фигуры $\Delta\sigma_i^*$ на касательной плоскости поверхности в точке M_i . Двугранный угол между вышеуказан-

ной касательной плоскостью к поверхности S в точке M_i и плоскостью Oxy равен γ_i — углу между перпендикулярами к ним. Так как $\Delta\tilde{\sigma}_i$ есть проекция плоской фигуры $\Delta\sigma_i^*$, причем двугранный угол между плоскостями этих фигур есть $\tilde{\gamma}_i$, то $\Delta\tilde{\sigma}_i = \Delta\sigma_i^* \cdot \cos \gamma_i$. Отсюда

$$\Delta\sigma_i^* = \frac{\Delta\tilde{\sigma}_i}{\cos \gamma_i}. \quad (20.7)$$

Можно показать (принимается без доказательства), что предел правой части (20.2) не изменится, если $\Delta\sigma_i$ заменить на $\Delta\sigma_i^*$. После этой замены, используя (20.7) и (20.6) и заметив, что $z_i = \varphi(x_i, y_i)$, запишем (20.2) в виде

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) d\sigma &= \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i)) \sqrt{[\varphi'_x(x_i, y_i)]^2 + [\varphi'_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot \Delta\tilde{\sigma}_i. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Если описанное построение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz , выполнить для каждой из частей поверхности S , область D_{xy} окажется разбитой на n частей соответственно разбиению поверхности S . Пусть $P_i(x_i, y_i)$ — точка, лежащая внутри части $\Delta\tilde{\sigma}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим функцию

$$f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{[\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2 + 1}.$$

Она определена и непрерывна в области D_{xy} , разбитой на n частей. Ясно, что сумма, стоящая под знаком предела в правой части (20.8), есть интегральная сумма для этой функции и области D_{xy} , в которой функция задана и непрерывна. При этом предел указанной суммы при $n \rightarrow \infty$, $\max d_i \rightarrow 0$ равен двойному интегралу от этой функции по области D_{xy} . Итак,

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{[\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2 + 1} dx dy. \quad (20.9)$$

Эта формула позволяет выразить интеграл по поверхности S через двойной интеграл.

Запишем формулу (20.9) для случая, когда подынтегральная функция $f(x, y, z) = R(x, y, z) \cos \gamma_i$, где $R(x, y, z)$ — заданная непрерывная функция, а $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — угол между осью Oz и вектором нормали к поверхности S , проведенной через точку $M(x, y, z)$ поверхности. Здесь нужно различать два случая.

1. $\cos \gamma > 0$, т.е. γ — острый угол. Тогда $\cos \gamma$ определяется по (20.3). В формуле (20.9) функцию $f(x, y, z)$ заменим на $R(x, y, z) \cos \gamma$. Согласно (20.3) получим

$$\iint_S R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (20.10)$$

2. $\cos \gamma < 0$ всюду на поверхности S . Это означает, что вектор $\vec{n}$ имеет направление, противоположное указанному на рис. 20.1, γ — тупой угол, $\cos \gamma$ определяется формулой (20.3), где в правой части перед дробью надо поставить минус, значит, в правой части формулы (20.10) в рассматриваемом случае появится знак минус:

$$\iint_S R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (20.11)$$

Предлагаем самостоятельно записать формулы, аналогичные (20.9), (20.10), (20.11), для двух случаев:

- когда поверхность S задана уравнением $y = \varphi(x, z)$ и спроецирована на плоскость xOz , здесь роль $\cos \gamma$ будет играть $\cos \beta$;
- поверхность S задана уравнением $x = \Phi(y, z)$ и спроецирована на плоскость yOz ; здесь роль $\cos \gamma$ будет играть $\cos \alpha$.

§ 20.4. Применение интеграла по поверхности к решению физических задач

К понятию интеграла по поверхности приводит большое число задач физики и механики. Рассмотрим задачу о нахождении объема (количества) жидкости, проходящего через данную поверхность за единицу времени.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан сплошной поток жидкости. Рассмотрим случай, когда все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость $\vec{V}$. В потоке возьмем плоскую фигуру σ , перпендикулярную вектору скорости $\vec{V}$, площадь этой фигуры обозначим σ (рис. 20.3).

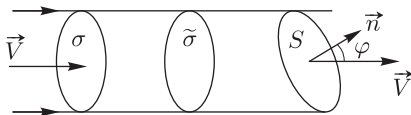


Рис. 20.3

Пусть S — другая (наклонная) плоская фигура с площадью S в потоке жидкости, которая при проецировании параллельно скорости $\vec{V}$ проецируется в фигуру σ . Это означает, что если через границу фигуры σ

провести цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными скорости $\vec{V}$, то на этой поверхности лежит и граница фигуры S . Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к фигуре S , и этот вектор образует со скоростью $\vec{V}$ угол $\varphi = (\vec{n}, \vec{V})$. Положим, что φ — острый угол, поэтому $\cos \varphi > 0$. Пусть K_σ и K_S — количество жидкости, проходящей через фигуры σ и S соответственно за единицу времени. Частицы жидкости, находящиеся на фигуре σ , за единицу времени пройдут путь, равный V — абсолютной величине скорости — и окажутся на фигуре $\tilde{\sigma}$. Таким образом, количество жидкости, прошедшей через фигуру σ за единицу времени, равно объему цилиндра, высота которого равна V , а площадь основания равна σ . Итак,

$$K_\sigma = V\sigma. \quad (20.12)$$

Рассмотрим объем между фигурами σ и S , заключенный внутри вышеуказанной цилиндрической поверхности, на которой лежат границы фигур σ , S . Жидкость течет вдоль цилиндрической поверхности и по условию через нее не протекает. Жидкость считаем несжимаемой, поэтому количество K_σ жидкости, втекшей в рассматриваемый объем через фигуру σ , равно количеству K_S жидкости, вытекшей через S из этого объема. Итак, $K_\sigma = K_S$. В силу (20.12)

$$K_S = V\sigma. \quad (20.13)$$

С другой стороны, запишем скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{V}$:

$$(\vec{V}, \vec{n}) = V \cos \varphi. \quad (20.14)$$

Так как фигура σ есть проекция фигуры S , причем двугранный угол между плоскостями этих фигур равен углу φ между перпендикулярами к этим плоскостям, то $\sigma = S \cos \varphi$. Подставим это выражение в (20.13) и получим $K_S = VS \cos \varphi$. Но согласно (20.14) произведение $V \cos \varphi$ равно скалярному произведению $(\vec{V}, \vec{n})$, поэтому

$$K_S = S(\vec{V}, \vec{n}). \quad (20.15)$$

Эта формула получена для случая, когда $\cos \varphi > 0$. Если же единичный вектор $\vec{n}$ имеет направление, противоположное указанному на рис. 20.3, то будем иметь $\cos \varphi < 0$; тогда $\varphi > \pi/2$ и $\sigma = S(-\cos \varphi)$, поэтому формула (20.15) примет вид

$$K_S = -S(\vec{V}, \vec{n}). \quad (20.16)$$

Теперь перейдем к общему случаю, когда в пространстве $Oxyz$ задан произвольный сплошной поток жидкости, в которой каждая частица имеет свою скорость. Будем считать, что картина течения

не зависит от времени, т.е. в каждой точке пространства скорость жидкости остается одной и той же.

Пусть в пространстве задана поверхность S , через которую протекает жидкость (рис. 20.4). Пусть скорость частицы в произвольной точке $M(x, y, z)$ поверхности S равна $\vec{V} = (P, Q, R)$. Так как в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности S скорость своя, то ясно, что проекции P, Q, R являются функциями координат x, y, z . Обозначим эти функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и будем считать, что они заданы на всей поверхности S . Это означает, что в каждой точке поверхности S известна скорость $\vec{V}$ частицы жидкости. Нужно найти K — количество жидкости (объем жидкости), проходящей через S за единицу времени.

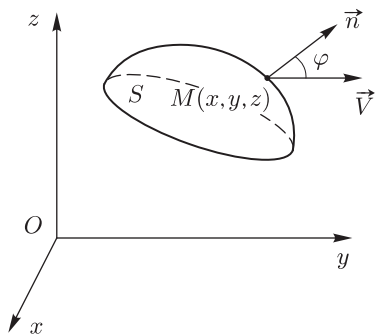


Рис. 20.4

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в ее произвольной точке $M(x, y, z)$. Угол между этим вектором и скоростью $\vec{V}$ обозначим через φ . Будем считать пока, что всюду на поверхности $\cos \varphi > 0$, как показано на рис. 20.4. Мы знаем, что указанный единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в точке M , равен $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где α, β, γ — углы, образованные этим вектором с осями Ox, Oy, Oz . Ясно, что эти углы являются функциями от координат x, y, z точки M поверхности: $\alpha = \alpha(x, y, z), \beta = \beta(x, y, z), \gamma = \gamma(x, y, z)$.

Если известно уравнение поверхности S в виде $z = \varphi(x, y)$, то косинусы этих углов определяются по формулам (20.5). Будем считать эти косинусы известными функциями от x, y, z всюду на поверхности S . Чтобы найти K , поверхность S разобьем на n частей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Внутри части $\Delta\sigma_i$ возьмем точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. В этой точке найдем скорость частицы жидкости $\vec{V}_{M_i} = (P_{M_i}, Q_{M_i}, R_{M_i})$, где $P_{M_i} = P(x_i, y_i, z_i), Q_{M_i} = Q(x_i, y_i, z_i), R_{M_i} = R(x_i, y_i, z_i)$. В этой же точке построим единичный вектор, направленный по нормали к S : $\vec{n}_{M_i} = (\cos \alpha_{M_i}, \cos \beta_{M_i}, \cos \gamma_{M_i})$, где $\cos \alpha_{M_i} = \cos \alpha(x_i, y_i, z_i), \cos \beta_{M_i} = \cos \beta(x_i, y_i, z_i), \cos \gamma_{M_i} = \cos \gamma(x_i, y_i, z_i)$. Возьмем скалярное произведение этих векторов

$$(\vec{V}_{M_i}, \vec{n}_{M_i}) = P_{M_i} \cos \alpha_{M_i} + Q_{M_i} \cos \beta_{M_i} + R_{M_i} \cos \gamma_{M_i}. \quad (20.17)$$

В силу малости участка $\Delta\sigma_i$ скорости в различных его точках мало отличаются друг от друга, и можно считать, что во всех точках этого участка скорость $\vec{V}$ приближенно равна скорости в точке M_i : $\vec{V} \approx$

$\approx \vec{V}_{M_i}$. Кроме того, по этой же причине приближенно можно считать, что во всех точках единичный вектор нормали совпадает с вектором нормали в точке M_i , т. е. $\vec{n} \approx \vec{n}_{M_i}$, так как при переходе от точки к точке направление $\vec{n}$ изменяется мало (считаем, что на поверхности S отсутствуют точки заострения вроде вершины конуса). Таким образом, приближенно фигуру $\Delta\sigma_i$ можно считать плоской, а скорость $\vec{V}$ на ней — постоянной и равной $\vec{V}_{M_i}$. Теперь количество K_i жидкости, проходящей через $\Delta\sigma_i$, определяется согласно (20.15) по формуле $K_i = (\vec{V}_{M_i}, \vec{n}_{M_i})\Delta\sigma_i$.

Сказанное относится ко всем частям, на которые мы разбили поверхность S . Сложив величины K_i для всех этих частей, приближенно найдем искомое значение K : $K \approx \sum_{i=1}^n (\vec{V}_{M_i}, \vec{n}_{M_i})\Delta\sigma_i$.

Чтобы найти точное значение K , нужно в правой части перейти к пределу, когда $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$. Итак, окончательно $K = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (\vec{V}_{M_i}, \vec{n}_{M_i})\Delta\sigma_i$. Эту формулу перепишем с учетом формулы (20.17) и получим

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (\vec{V}_{M_i}, \vec{n}_{M_i})\Delta\sigma_i = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (P_{M_i} \cos \alpha_{M_i} + Q_{M_i} \cos \beta_{M_i} + R_{M_i} \cos \gamma_{M_i})\Delta\sigma_i. \end{aligned} \quad (20.18)$$

Здесь под знаком предела стоит интегральная сумма для функции

$$P(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) + Q(x, y, z) \cos \beta(x, y, z) + R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) = (\vec{V}, \vec{n})$$

(которую будем считать непрерывной всюду на S) и поверхности S , на которой функция задана. Предел этой интегральной суммы равен интегралу по поверхности S от указанной функции. Таким образом, формула (20.18) дает

$$K = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_S (\vec{V}, \vec{n}) d\sigma. \quad (20.19)$$

Эту формулу получили для случая, когда $\cos \varphi > 0$ всюду на S . Если вектор $\vec{n}$ имеет направление, обратное указанному на рис. 20.4, т. е. всюду на поверхности $\cos \varphi < 0$, то, как ясно из (20.16), в правой части (20.19) появляется знак минус.

§ 20.5. Формула Остроградского

Теорема 20.1. Пусть V — конечная область в пространстве $Oxyz$, ограниченная замкнутой поверхностью S , и $\vec{n}$ есть единичный вектор нормали к S в ее произвольной точке (x, y, z) , причем вектор направлен во внешнюю сторону по отношению к области V и $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где α, β, γ — углы, образованные вектором $\vec{n}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz .

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ непрерывны в области V включая границу S , то справедлива формула

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \quad (20.20)$$

Формула (20.20) называется *формулой Остроградского*.

Доказательство. Пусть D_{xy} — проекция области V на плоскость Oxy при проецировании параллельно оси Oz . Чтобы получить эту проекцию, построим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными Oz , которая касается поверхности S по некоторой линии λ , которая в свою очередь делит поверхность S на две части: верхнюю S_2 и нижнюю S_1 (рис. 20.5). Эти поверхности S_2 и S_1 заданы соответственно уравнениями $z = z_2(x, y)$, $z = z_1(x, y)$. Последние функции считаем однозначными всюду в области D_{xy} . Это означает, что для любой точки $P(x, y)$ области D_{xy} прямая, проведенная через нее параллельно оси Oz , пересекает каждую из поверхностей S_1 и S_2 только в одной точке. Все точки этой прямой имеют одну и ту же абсциссу x , а ординату y — как у точки P . Для точек этой прямой, лежащих в области V , аппликата z изменяется от $z_1(x, y)$ до $z_2(x, y)$. Мы знаем, что для тройного интеграла справедлива формула (§ 13.12):

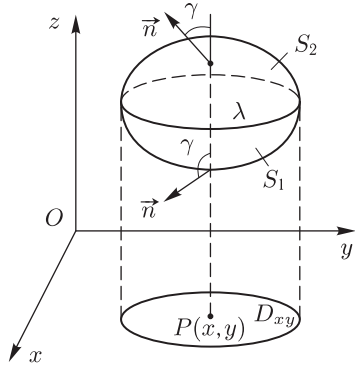


Рис. 20.5

$$\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz. \quad (20.21)$$

Здесь внутренний интеграл по z берется при постоянных x и y , это означает, что подынтегральная функция $\partial R(x, y, z)/\partial z$ зависит только от одной переменной z . Для этой функции первообразной является $R(x, y, z)$ при $x, y = \text{const}$. Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)).$$

Следовательно, (20.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (20.22)$$

С другой стороны, запишем интеграл по поверхности S от функции $R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)$. Ясно, что $\cos \gamma > 0$ всюду на S_2 и $\cos \gamma < 0$ всюду на S_1 . Так как поверхность S состоит из двух частей S_1, S_2 , то интеграл по S можно разбить на два интеграла, и мы получим

$$\iint_S R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma. \quad (20.23)$$

Так как $\cos \gamma > 0$ всюду на S_2 и S_2 определяется уравнением $z = z_2(x, y)$, то по формуле (20.10) имеем

$$\iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy.$$

Так как $\cos \gamma < 0$ всюду на S_1 и S_1 определяется уравнением $z = z_1(x, y)$, то по формуле (20.11)

$$\iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy.$$

Эти выражения подставим в правую часть (20.23) и, сравнив с (20.22), получим $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma d\sigma$. Ясно, что эта формула остается в силе и в том случае, когда граница S области V имеет участки, лежащие на вышеуказанной цилиндрической поверхности. Нетрудно проверить, что она справедлива и в том случае, когда область V можно разбить на части, границы которых удовлетворяют приведенным условиям.

Аналогично можно показать, что

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha d\sigma, \quad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta d\sigma.$$

При получении этих формул область V надо проецировать соответственно параллельно осям Ox и Oy . Просуммировав три формулы для P , Q и R , придем к формуле (20.20). Она связывает тройной интеграл по области V с интегралом по поверхности S — границе области V .

§ 20.6. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от линии интегрирования

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана поверхность S , ограниченная кривой λ (рис. 20.6). Пусть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в ее произвольной точке (x, y, z) ; α, β, γ — углы, образованные этим вектором с осями Ox , Oy , Oz . Пусть на поверхности S заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, непрерывные вместе со всеми своими частными производными. На кривой λ за положительное возьмем направление обхода против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{n}$. Тогда справедлива формула Стокса:

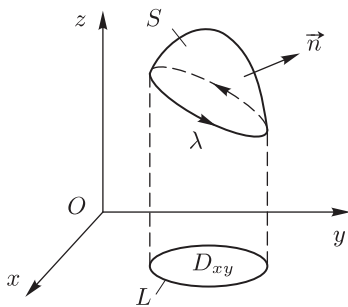


Рис. 20.6

$$\int_{\lambda} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \quad (20.24)$$

Она связывает интеграл по поверхности S с криволинейным интегралом по кривой λ — границе поверхности S . Изложим основные этапы вывода этой формулы без подробных выкладок.

Поверхность S спроецируем параллельно оси Oz на плоскость Oxy . Пусть D_{xy} — проекция поверхности S , заданных уравнением $z = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — функция, однозначная в области D_{xy} . Вначале покажем, исходя из определения криволинейного интеграла по

координатам для пространственной кривой λ и плоской кривой L , что справедливо равенство

$$\int_{\lambda} P(x, y, z) dx = \int_L P(x, y, \varphi(x, y)) dx, \quad (20.25)$$

где L есть граница области D_{xy} , на которой установлено положительное направление соответственно положительному направлению обхода на λ . Здесь учтено, что для точек кривой λ с координатами (x, y, z) имеем $z = \varphi(x, y)$, при этом $P(x, y, z) = P(x, y, \varphi(x, y))$. Криволинейный интеграл правой части (20.25) выразим через двойной интеграл по области D_{xy} , используя формулу Грина (14.15):

$$\int_L \tilde{P}(x, y) dx + \tilde{Q}(x, y) dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy,$$

положив в последней $\tilde{Q}(x, y) = 0$ и $\tilde{P}(x, y) = P(x, y, \varphi(x, y))$. Когда $z = \varphi(x, y)$, имеем $\frac{\partial \tilde{P}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \varphi'_y$ (согласно правилу дифференцирования сложной функции). Последний двойной интеграл выразим через интеграл по поверхности S согласно (20.10), учитывая при этом (§ 20.2), что $\cos \beta = -\varphi'_y \cos \gamma$. Тогда получим

$$\int_{\lambda} P dx = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) d\sigma.$$

Нетрудно проверить, что эта формула справедлива и в том случае, когда поверхность S можно разбить на части, удовлетворяющие приведенным условиям.

Спроецировав поверхность S на плоскость Oxz , а затем на Oyz , получим еще две аналогичные формулы. Сложив эти три формулы почленно, придем к (20.24).

Используя формулу Стокса, получим условия независимости криволинейного интеграла по координатам по пространственной кривой от формы линии интегрирования.

Теорема 20.2. Если всюду в пространстве $Oxyz$ заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, непрерывные вместе со своими частными производными, и выполняются соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (20.26)$$

то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz, \quad (20.27)$$

где A, B — произвольные точки пространства, не зависит от линии интегрирования. Иначе говоря, этот интеграл зависит только от положения A и B — начала и конца кривой.

Доказательство. Соединим точки A и B двумя произвольными кривыми AKB , ACB . Получим замкнутую кривую $ACBKA$. На эту кривую натянем некоторую поверхность S и для этой поверхности с границей $ACBKA$ запишем формулу Стокса (20.24). Тогда в силу условий (20.26) подынтегральное выражение в правой части этой формулы равно нулю, значит, левая часть формулы также равна нулю, т. е.

$$\int_{ACBKA} P dx + Q dy + R dz = 0$$
 (в дальнейшем подынтегральное выражение опускаем, оно везде одно и то же). Но кривая $ACBKA$ состоит из двух частей ACB, BKA , значит, интеграл равен сумме интегралов по каждой из частей:

$$\int_{ACB} + \int_{BKA} = 0.$$
 Во втором интеграле изменим направление интегрирования, при этом его знак изменяется на обратный согласно свойству криволинейных интегралов по координатам, тогда
$$\int_{ACB} = \int_{AKB}.$$
 Теорема доказана.

Справедлива и обратная

Теорема 20.3. Если криволинейный интеграл (20.27) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования, то всюду в пространстве выполняются соотношения (20.26).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.4 для случая плоской кривой.

Рассмотрим еще одно свойство криволинейного интеграла.

Пусть начало A — фиксированная точка $A(x_0, y_0, z_0)$, x_0, y_0, z_0 — заданные числа, а конец B — переменная точка, ее координаты суть (x, y, z) и всюду в пространстве $Oxyz$ выполняются соотношения (20.26). Тогда для каждой точки $B(x, y, z)$ интеграл (20.27) имеет свое значение, зависящее только от положения точки $B(x, y, z)$. Следовательно, указанный интеграл (20.27) является функцией от B , т. е. функцией от координат x, y, z конца кривой AB . Эту функцию обозначим

$$U(x, y, z) = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz. \quad (20.28)$$

Нетрудно показать, что

$$U'_x = P, \quad U'_y = Q, \quad U'_z = R. \quad (20.29)$$

В силу (20.29) подынтегральное выражение интеграла (20.28) приобретает вид $U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz$. В правой части этого выражения стоит полный дифференциал dU функции $U(x, y, z)$: $P dx + Q dy + R dz = dU$.

Таким образом, при выполнении условий (20.26) подынтегральное выражение криволинейного интеграла (20.27) представляет собой полный дифференциал функции $U(x, y, z)$, поэтому условие (20.26) иногда называют *условием полного дифференциала* для подынтегрального выражения интеграла (20.27).

Чтобы обосновать первое из соотношений (20.29), поступим так (остальные два устанавливаются аналогично). В интеграле (20.28), не зависящем от формы линии AB , в качестве последней возьмем линию AB_0B , состоящую из кривой AB_0 и отрезка B_0B прямой, параллельной оси Ox , где B_0 — точка с фиксированной абсциссой x_* . Для координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ любой точки отрезка B_0B имеем $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = z$, $x_* < \tilde{x} < x$ (для определенности считаем $x_* < x$).

Интеграл формулы (20.28) запишем в виде суммы интегралов, взятых по линиям AB_0 и B_0B . Интеграл по линии AB_0 от x не зависит, так как является функцией координат x_* , y , z точки B_0 , поэтому

$$\left(\int_{AB_0} P dx + Q dy + R dz \right)'_x = 0.$$

А интеграл по отрезку B_0B , как ясно из определения этого интеграла, равен $\int_{B_0B} P dx + Q dy + R dz = \int_{x_*}^x P(\tilde{x}, y, z) d\tilde{x}$ — определенному интегралу от функции $P(\tilde{x}, y, z)$ аргумента $\tilde{x}$ при фиксированных y и z . Поэтому

$$\left(\int_{B_0B} P dx + Q dy + R dz \right)'_x = \left(\int_{x_*}^x P(\tilde{x}, y, z) d\tilde{x} \right)'_x = P(x, y, z).$$

Здесь мы учли теорему 12.3 о производной от определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Итак, $U'_x = P(x, y, z)$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

§ 21.1. Понятия векторного поля и векторной линии

Векторное поле — пространство, в каждой точке которого задана некоторая векторная величина. Пример векторного поля — гравитационное поле Земли. В каждой точке вблизи Земли на материальную частицу действует определенная сила, направленная к центру Земли, а ее абсолютная величина зависит от расстояния частицы до центра Земли. Другой пример — поле скоростей частиц потока жидкости. Здесь каждая частица имеет скорость со своими абсолютной величиной и направлением.

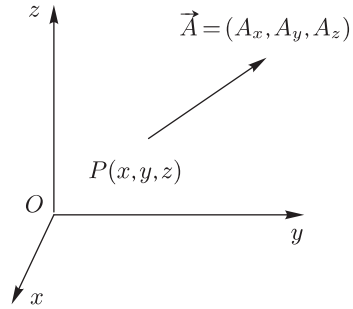


Рис. 21.1

Рассмотрим векторное поле, в котором введена декартова система координат $Oxyz$ (рис. 21.1).

Пусть в каждой точке $P(x, y, z)$ задан вектор $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ с началом в точке P . Его проекции A_x, A_y, A_z на оси координат являются функциями координат (x, y, z) точки P :

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}. \quad (21.1)$$

Таким образом, задание векторного поля в пространстве $Oxyz$ равносильно заданию трех функций $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)$. В дальнейшем будем считать, что эти функции непрерывны вместе с частными производными по своим аргументам.

Пусть векторное поле таково, что всюду $A_z = 0$, т.е. всюду вектор $\vec{A}$ ортогонален оси Oz , поскольку в этом случае скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$ обращается в нуль: $(\vec{A}, \vec{k}) = A_x \cdot 0 + A_y \cdot 0 + A_z \cdot 1 = 0$; кроме того, проекции A_x, A_y рассматриваемого вектора не зависят от z . При этом (21.1) примет вид $\vec{A} = A_x(x, y)\vec{i} + A_y(x, y)\vec{j}$. Во всех плоскостях, перпендикулярных оси

Oz , картина векторного поля будет одинакова. Такое поле называют *плоским векторным полем*. Ясно, что при этом достаточно описать картину векторного поля в плоскости Oxy .

В качестве примера плоского векторного поля рассмотрим поле скоростей частиц жидкости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz как твердое тело, причем вращение считаем происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу оси Oz . Опишем картину течения в плоскости Oxy .

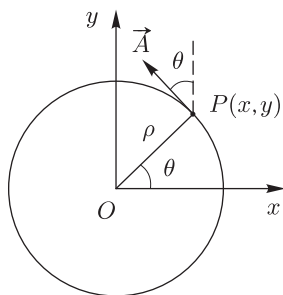


Рис. 21.2

Точка $P(x, y)$ вращается по окружности, ее радиус равен ρ (рис. 21.2). Пусть угол $\theta = \widehat{(Ox, OP)}$. Из рис. 21.2 видно, что

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (21.2)$$

Пусть $\vec{A}$ — скорость точки P , она направлена по касательной к окружности. Абсолютная величина скорости $A = \omega \cdot \rho$.

Проекция вектора $\vec{A}$ на ось Ox равна его длине A , умноженной на косинус угла между вектором и осью Ox : $A_x = A \cos(\pi/2 + \theta) = -A \sin \theta = -\omega \rho \sin \theta$. Аналогично проекция скорости на Oy $A_y = A \cos \theta = \omega \rho \cos \theta$. С учетом (21.2) выражения для A_x , A_y запишем так: $A_x = -\omega y$, $A_y = \omega x$. Подставим эти выражения в (21.1) и получим $\vec{A} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$.

Векторной называется линия в векторном поле, в каждой точке которой вектор поля направлен по касательной к этой линии. Примером векторной линии служит линия тока в поле скоростей, т. е. линия, по которой двигаются частицы жидкости. Так как эта линия является траекторией движения частиц, то скорость частицы направлена по касательной к траектории. В последнем примере такой линией служит окружность радиуса ρ , по которой движется частица P .

§ 21.2. Поток вектора через поверхность

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано векторное поле

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k}. \quad (21.3)$$

В этом пространстве возьмем поверхность S . Пусть $P(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности S . Построим вектор $\vec{A}$ с началом в точке P (рис. 21.3). Пусть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ есть единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в точке P . Здесь α , β , γ — углы, образованные вектором $\vec{n}$ с осями Ox , Oy , Oz . Обозначим через φ угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{A}$. Запишем скалярное

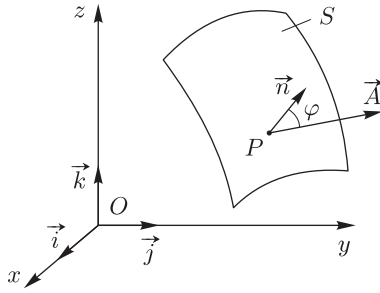


Рис. 21.3

произведение построенных векторов для точки $P(x, y, z)$ поверхности S : $(\vec{A}, \vec{n}) = A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma$. Это произведение найдем в каждой точке P поверхности S , тогда оно будет определено на всей поверхности S , поэтому от указанного произведения можно взять интеграл по поверхности S .

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) d\sigma. \quad (21.4)$$

Этот интеграл называется *поток вектора $\vec{A}$ (векторного поля) через поверхность S* .

Пусть векторное поле есть поле скоростей частиц потока жидкости, тогда согласно формуле (20.19) для интеграла (21.4) имеет место равенство

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = K, \quad (21.5)$$

где K — количество жидкости, проходящей через поверхность S за единицу времени, когда $\cos \varphi > 0$ всюду на поверхности S . Если же $\cos \varphi < 0$ всюду на S , то

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = -K. \quad (21.6)$$

Пусть векторное поле в системе координат $Oxyz$ задано формулой (21.3). В этом поле возьмем замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторую область V с объемом V (рис. 21.4). Будем считать пока, что векторное поле есть поле скоростей частиц в потоке жидкости. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к S в произвольной ее точке во внешнюю сторону по отношению к области V : $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где $\alpha, \beta,$

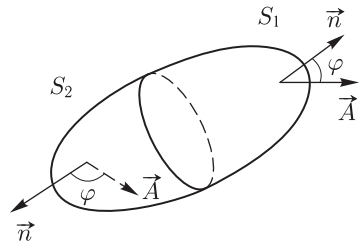


Рис. 21.4

γ — углы, образованные $\vec{n}$ с осями координат. Пусть поверхность S состоит из двух частей S_1, S_2 , причем всюду на S_1 вектор $\vec{A}$ образует острый угол с вектором $\vec{n}$, т.е. $\vec{A}$ направлен во внешнюю сторону для V . Можно утверждать, что через S_1 жидкость вытекает из объема V . Пусть всюду на S_2 вектор $\vec{A}$ образует с $\vec{n}$ тупой угол, т.е. $\vec{A}$ направлен во внутреннюю сторону по отношению к V , тогда через S_2 жидкость втекает в область V (внутрь S). Угол между $\vec{A}$ и $\vec{n}$ обозначим через φ .

Так как всюду на S_1 имеем $\cos \varphi > 0$, то в силу (21.5) $\iint_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = K_{\text{вытек}}$, где $K_{\text{вытек}}$ — количество жидкости, вытекающей из области V через S_1 за единицу времени. Аналогично всюду на S_2 $\cos \varphi < 0$, и в силу (21.6) $\iint_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = -K_{\text{втек}}$, где $K_{\text{втек}}$ — количество жидкости, втекающей в область V через S_2 за единицу времени.

Так как поверхность S состоит из двух частей S_1, S_2 , то

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma.$$

Отсюда

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = K_{\text{вытек}} - K_{\text{втек}}. \quad (21.7)$$

Следовательно, если $\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma > 0$, то $(K_{\text{вытек}} - K_{\text{втек}}) > 0$ и $K_{\text{вытек}} > K_{\text{втек}}$; значит, из области V вытекает жидкости больше, чем втекает. Это означает, что внутри V имеются источники, питающие поток жидкости. При этом интеграл (21.7) выражает количество жидкости, возникающей в области V , т.е. внутри S , за единицу времени. Если же этот интеграл меньше нуля, то согласно (21.7) получим $K_{\text{вытек}} < K_{\text{втек}}$, т.е. из области V жидкости вытекает меньше, чем туда втекает. Следовательно, в V имеются стоки, через которые жидкость удаляется из потока. При этом интеграл формулы (21.7) выражает (с обратным знаком) количество жидкости, исчезающее внутри S за единицу времени.

Интеграл в (21.7) разделим на объем V области, лежащей внутри S :

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma / V. \quad (21.8)$$

В (21.8) перейдем к пределу, когда $V \rightarrow 0$ и V стягивается к точке $P(x, y, z)$, лежащей внутри S . Символически обозначим это как $S \rightarrow P$,

тогда предел отношения (21.8) запишем в виде

$$\lim_{S \rightarrow P(x,y,z)} \left[\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma / V \right]. \quad (21.9)$$

Этот предел согласно вышесказанному характеризует отнесенное к единице объема количество жидкости, возникающей (исчезающей) в $P(x, y, z)$ за единицу времени. Ясно, что если предел положительный, то в точке P жидкость возникает, если он отрицательный, то исчезает. В первом случае точка P — источник, во втором случае — сток. Предел (21.9) называют *мощностью источника или стока в точке P* .

§ 21.3. Дивергенция векторного поля

Пусть векторное поле задано формулой (21.3). Возьмем в нем замкнутую поверхность S , ограничивающую область V объемом V . Пусть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ есть единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в ее произвольной точке во внешнюю сторону по отношению к V . Внутри S возьмем произвольную точку $P(x, y, z)$ и рассмотрим предел (21.9), предварительно вычислив интеграл, стоящий в числителе этой формулы. Этот предел назовем *дивергенцией векторного поля в точке P* и обозначим $\operatorname{div} \vec{A}$. Итак,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{S \rightarrow P} \left[\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma / V \right]. \quad (21.10)$$

Ясно, что в каждой точке $P(x, y, z)$ предел формулы (21.10) будет свой, т. е. он является функцией от координат произвольной точки P векторного поля. Предел (21.10) представляет собой мощность источника или стока в точке P , если заданное векторное поле представляет собой поле скоростей частиц потока жидкости. Этим определяется физический смысл дивергенции.

Получим теперь формулу для вычисления дивергенции, когда векторное поле задано формулой (21.3). Интеграл по поверхности S , стоящий в числителе правой части (21.10), выразим по формуле Остроградского через тройной интеграл по области V , заменив в этой формуле P , Q , R соответственно на A_x , A_y , A_z . Получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) d\sigma = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \end{aligned}$$

Тройной интеграл в левой части этой формулы согласно свойству тройных интегралов запишем в виде произведения подынтегральной функции в некоторой точке M внутри S на объем V , ограниченный поверхностью S , т. е. в виде

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M V.$$

Это произведение подставим вместо интеграла $\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma$ в формулу (21.10). При этом V сократится, и будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{S \rightarrow P(x,y,z)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M. \quad (21.11)$$

Поскольку в (21.3) A_x, A_y, A_z — непрерывные функции вместе со своими частными производными, то сумма в правой части формулы (21.11) есть непрерывная функция и

$$\lim_{M \rightarrow P} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_P \quad (21.12)$$

(при $V \rightarrow 0$, когда S стягивается в точку P , точка M стремится к точке P , поэтому под знаком предела можно заменить $S \rightarrow P$ на $M \rightarrow P$). При этом получим

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (21.13)$$

где правая часть есть сумма, вычисленная для точки $P(x, y, z)$. Эта формула позволяет вычислить $\operatorname{div} \vec{A}$ в произвольной точке $P(x, y, z)$ векторного поля, когда это векторное поле задано формулой (21.3). С учетом (21.13) формулу Остроградского теперь можно коротко записать так:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \quad (21.14)$$

§ 21.4. Циркуляция, ротор (вихрь) векторного поля

Пусть в системе координат $Oxyz$ задано векторное поле формулой (21.3), где A_x, A_y, A_z — функции, имеющие непрерывные частные производные по своим аргументам. В векторном поле возьмем замкнутый контур λ , на нем выберем положительное направление (рис. 21.5). По контуру возьмем криволинейный интеграл по координатам

$$\oint_{\lambda} A_x dx + A_y dy + A_z dz. \quad (21.15)$$

Введем символический вектор $d\vec{r}$, его проекции на оси координат обозначим dx , dy , dz , т. е. $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Ясно, что подынтегральное выражение в (21.15) представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $d\vec{r}$. Теперь интеграл (21.15) можем записать в виде

$$\oint_{\lambda} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}). \quad (21.16)$$

Он называется *циркуляцией вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру λ* .

Чтобы выяснить физический смысл циркуляции, запишем ее для частного случая, когда векторное поле — плоское векторное поле скоростей частиц жидкости, которая вращается как твердое тело вокруг оси Oz с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу Oz . Мы видели (§ 21.1), что векторное поле при этом определяется формулой

$$\vec{A} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}, \quad (21.17)$$

т. е. $A_x = -\omega y$, $A_y = \omega x$. Это плоское поле достаточно рассмотреть на плоскости Oxy . На этой плоскости возьмем произвольный замкнутый контур λ , на нем установим положительное направление против хода часовой стрелки. Область внутри λ обозначим через D , площадь ее равна S . Для этого векторного поля по формуле (21.16) запишем циркуляцию:

$$\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint_{\lambda} A_x dx + A_y dy = \oint_{\lambda} -\omega y dx + \omega x dy.$$

По формуле Грина

$$\oint_{\lambda} -\omega y dx + \omega x dy = \iint_D (\omega - (-\omega)) dx dy = 2\omega \iint_D dx dy,$$

но последний двойной интеграл равен площади S области D . Итак, будем иметь $\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) = 2\omega S$. Отсюда получим

$$\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) / S = 2\omega. \quad (21.18)$$

Таким образом, отношение циркуляции по контуру λ к площади S области D , заключенной внутри λ , стоящее в левой части этой формулы, характеризует вращение фигуры D вокруг оси Oz .

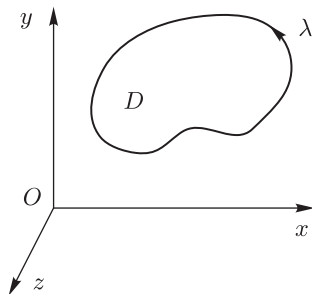


Рис. 21.5

Теперь перейдем к общему случаю. В векторном поле возьмем произвольную плоскость, проходящую через некоторую точку

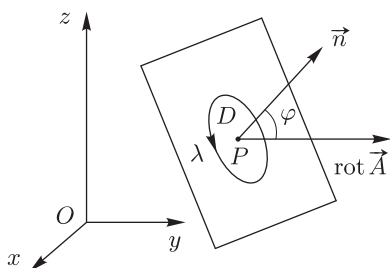


Рис. 21.6

$P(x, y, z)$ (рис. 21.6). Пусть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичный вектор, направленный по нормали к этой плоскости. Расположим этот вектор с началом в точке P . На указанной плоскости возьмем произвольный замкнутый контур λ , внутри которого находится точка P . Выберем на λ положительное направление — против хода часовой стрелки, если смотреть с конца $\vec{n}$. По этому замкнутому контуру

найдем циркуляцию $\vec{A}$, т. е. $\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r})$, и поделим ее на S — площадь фигуры, лежащей внутри λ . Получим $\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r})/S$. Это отношение характеризует, как видно из (21.18), вращение фигуры D с площадью S вокруг вектора $\vec{n}$, перпендикулярного D . Рассмотрим

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r})/S \right], \quad (21.19)$$

когда контур λ стягивается в точку P . Этот предел характеризует вращение частицы, расположенной в точке P , вокруг вектора $\vec{n}$, перпендикулярного D .

Получим формулу для вычисления величины (21.19). Запишем для фигуры S с границей λ формулу Стокса, заменив в последней P, Q, R, S на A_x, A_y, A_z, D соответственно:

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) &= \int_{\lambda} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_D \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Здесь интеграл по поверхности — это интеграл по плоской фигуре D . Поэтому, как и в случае двойного интеграла, интеграл по поверхности D можно представить в виде произведения подынтегральной функции, взятой в некоторой точке M фигуры D , и площади S этой фигуры:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_M S. \end{aligned}$$

Подставим это произведение в правую часть (21.20) и запишем (21.19) в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) / S \right] = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_M \quad (21.21) \end{aligned}$$

Здесь $M \rightarrow P$, предел правой части (21.21) равен значению функции, стоящей под знаком предела, в предельной точке P , так как эта функция непрерывна везде и, в частности, в точке P :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) / S \right] = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \\ + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma, \quad (21.22) \end{aligned}$$

где правая часть вычисляется в точке $P(x, y, z)$.

Рассмотрим вектор с началом в точке P , проекции которого на оси координат равны соответствующим множителям у косинусов в правой части формулы (21.22); этот вектор назовем *ротором (вихрем) векторного поля в точке P* и обозначим

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (21.23)$$

Тогда правая часть (21.22) — скалярное произведение $\text{rot } \vec{A}$ и вектора $\vec{n}$. Отсюда

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) / S \right] = (\vec{n}, \text{rot } \vec{A}).$$

Записав скалярное произведение в правой части через длины векторов и $\cos \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\text{rot } \vec{A}$, получим

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow P}} \left[\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) / S \right] = |\operatorname{rot} \vec{A}| \cos \varphi. \quad (21.24)$$

Пусть P — фиксированная точка, тогда $|\operatorname{rot} \vec{A}|$ — фиксированный модуль. Будем изменять φ , тогда в (21.24) изменится величина в левой части, которая характеризует вращение частицы P вокруг $\vec{n}$. Среди всех направлений (из всех углов φ) эта величина будет наибольшей, когда $\cos \varphi = 1$, т. е. $\varphi = 0$. Следовательно, $\operatorname{rot} \vec{A}$ указывает направление, вокруг которого вращение частицы P будет наибольшим. При $\varphi = \pi/2$, когда векторы $\vec{n}$ и $\operatorname{rot} \vec{A}$ ортогональны, это число равно нулю.

Для векторного поля, определяемого формулой (21.17), согласно (21.23) имеем $\operatorname{rot} \vec{A} = 2 \cdot \omega \cdot \vec{k}$. С учетом (21.23) формулу Стокса (21.20) можно записать так:

$$\oint_{\lambda} (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{A}) d\sigma.$$

§ 21.5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана функция $U(x, y, z)$. Найдем ее частные производные $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$, $\partial U / \partial z$ и вычислим их значения в точке $P(x, y, z)$. Построим вектор с началом в точке P , проекции которого на оси координат равны этим числам (рис. 21.7). Этот вектор, согласно (9.48), есть $\operatorname{grad} U$ в точке P :

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (21.25)$$

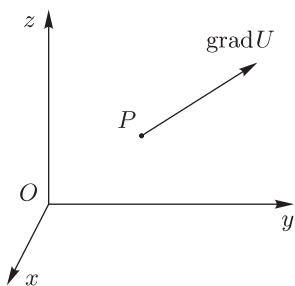


Рис. 21.7

Введем в рассмотрение символический вектор, называемый *оператором Гамильтона*, который обозначается ∇ и называется *набла-вектором*, а его проекции на оси координат представляют собой символы частных производных, т. е.

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (21.26)$$

Под произведением символа частной производной и функции U будем понимать взятие частной производной, например, $\frac{\partial}{\partial x} U = \frac{\partial U}{\partial x}$. Умножим (21.26) на заданную функцию и получим

$$\nabla U = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} U + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} U + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Сравнив с (21.25), придем к формуле $\nabla U = \operatorname{grad} U$.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано векторное поле

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k},$$

где $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$ — заданные функции от x , y , z , имеющие непрерывные частные производные. Возьмем скалярное произведение набла-вектора (21.26) и вектора $\vec{A}$:

$$(\nabla, \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Сравнив с (21.13), получим $(\nabla, \vec{A}) = \operatorname{div} \vec{A}$.

Запишем векторное произведение набла-вектора и вектора $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

С учетом (21.23) будем иметь $\nabla \times \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Теперь положим $\vec{A} = \operatorname{grad} U$, тогда согласно (21.25) $A_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Отсюда согласно (21.13) имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Справа здесь стоят частные производные второго порядка, поэтому

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (21.27)$$

Сумма в правой части, называемая *оператором Лапласа*, обозначается ΔU :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Таким образом, (21.27) примет вид

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U. \quad (21.28)$$

§ 21.6. Простейшие векторные поля

Пусть задано векторное поле $\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k}$, где все функции справа непрерывны вместе со своими частными производными.

Трубчатое (соленоидальное) векторное поле. Векторное поле называется *трубчатым (соленоидальным)*, если всюду $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Если это векторное поле является полем скоростей частиц в потоке жид-

кости, то условие $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ всюду означает, что в потоке отсутствуют источники и стоки, в которых жидкость соответственно возникает или исчезает.

Для простоты рассмотрим векторное поле скоростей частиц жидкости. В потоке жидкости возьмем плоскую фигуру S_0 . Через каждую точку границы этой фигуры проведем линию тока, т.е. линию, по

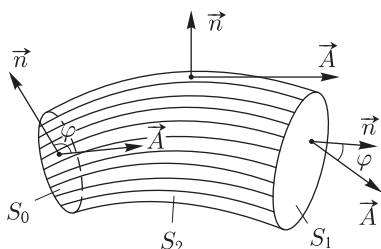


Рис. 21.8

которой двигаются частицы жидкости, и получим поверхность, состоящую из линий тока. Жидкость течет вдоль этой поверхности, не перетекая через нее. Эта поверхность называется *векторной трубкой*, в нашем случае *трубкой тока* (рис. 21.8). Пусть S_1 — сечение трубки тока, отличное от S_0 , а V — область, заключенная внутри векторной трубки между сечениями S_0 ,

S_1 . Границу этой области обозначим S , она состоит из трех частей: S_0 , S_1 и S_2 — границы части векторной трубки, заключенной между S_0 и S_1 . Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в ее произвольной точке во внешнюю сторону по отношению к области V и φ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{A}$ в указанной точке. Всюду на S_1 имеем $\cos \varphi > 0$ (как видно из рис. 21.8); $\cos \varphi < 0$ на S_0 , $\cos \varphi = 0$ на S_2 (так как $\varphi = 90^\circ$). Для области V с границей S запишем формулу Остроградского

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, dx \, dy \, dz = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma.$$

Поскольку $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ всюду в векторном поле, следовательно, и в области V , левая часть последней формулы равна нулю; значит, правая часть тоже есть нуль. Интеграл правой части запишем в виде суммы трех интегралов, учитывая, что S состоит из S_1 , S_2 , S_0 , получим

$$\iint_{S_0} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma = 0.$$

Здесь последний интеграл обращается в нуль, так как всюду на S_2 $\cos \varphi = 0$ и скалярное произведение $(\vec{A}, \vec{n}) = 0$; следовательно,

$$\iint_{S_0} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\sigma = 0. \quad (21.29)$$

Так как $\cos \varphi > 0$ всюду на S_1 и $\cos \varphi < 0$ всюду на S_0 , то

$$\iint_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = K_{S_1}, \quad \iint_{S_0} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = -K_{S_0},$$

где K_{S_1} и K_{S_0} — количество жидкости, проходящее через S_1 и S_0 соответственно за единицу времени. Эти числа подставим в (21.29) вместо интегралов и получим $K_{S_0} - K_{S_1} = 0$, значит, $K_{S_0} = K_{S_1}$.

Таким образом, в трубчатом поле через любые два сечения в трубке тока — векторной трубке — проходит одинаковое количество жидкости за единицу времени.

Потенциальное (безвихревое) векторное поле. Векторное поле называется *потенциальным (безвихревым)*, если всюду в векторном поле $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$. Значит, согласно (21.23) в этом поле всюду

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (21.30)$$

В векторном поле возьмем криволинейный интеграл $\int_{AB} A_x dx + A_y dy + A_z dz$. Будем считать, что A — фиксированная точка с заданными координатами (x_0, y_0, z_0) , B — переменная точка с координатами (x, y, z) . По теореме 20.2 этот интеграл для любых точек A, B в силу соотношений (21.30) не зависит от линии интегрирования, т. е. он зависит только от положения точки B (так как точка A фиксирована). Таким образом, указанный интеграл является функцией координат (x, y, z) точки B . Эту функцию обозначим $U(x, y, z)$. Итак,

$$U(x, y, z) = \int_{AB} A_x dx + A_y dy + A_z dz. \quad (21.31)$$

По формуле (20.29) $\frac{\partial U}{\partial x} = A_x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = A_y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = A_z$. Отсюда $\vec{A} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$, т. е.

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U. \quad (21.32)$$

Последнее соотношение является характерным для потенциального векторного поля. Оно показывает, что вектор этого поля в любой точке представляется как $\operatorname{grad} U$, где U определяется по формуле (21.31). Функция U называется *потенциальной функцией* или *потенциалом*.

Гармоническое поле. Векторное поле называется *гармоническим*, если оно одновременно является и трубчатым и потенциальным. Так как поле является потенциальным, то согласно (21.32) $\vec{A} = \operatorname{grad} U$. Кроме того, поле является трубчатым, следовательно, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Значит, $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$. С учетом (21.28) получим $\Delta U = 0$. Функция U , удовлетворяющая последнему уравнению, называется *гармонической*.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 22.1. Статистическое и классическое определения вероятности случайного события. Геометрическая вероятность

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Случайное событие — это событие, которое может произойти или нет при осуществлении определенных условий.

В дальнейшем вместо слов «осуществлены определенные условия» будем говорить «проведено испытание». Например, появление (цифровой) надписи при бросании монеты — случайное событие, а бросание монеты — испытание. *Достоверным* называется событие, которое в результате испытания неизбежно должно произойти. *Невозможное событие* — событие, которое в данном испытании произойти не может. Каждое случайное событие зависит от множества факторов, которые невозможно учесть, поэтому нельзя предсказать появление или непоявление отдельного случайного события. Иначе обстоит дело, когда речь идет о случайных событиях, которые могут многократно повторяться при одинаковых испытаниях, т.е. когда речь идет о массовых однородных случайных событиях, имеющих закономерности. Теория вероятностей занимается изучением закономерностей массовых случайных событий. Знание этих закономерностей позволяет предсказать, как будут происходить события. Если нельзя предсказать появление надписи при одном бросании монеты, то можно приблизительно предсказать число появления надписи, например, при 100 бросаниях. Надпись появляется приблизительно 50 раз. Теория вероятностей применяется в теориях надежности, массового обслуживания, стрельбы и многих других областях науки и техники.

Обозначим случайное событие через A .

Относительной частотой случайного события A называется число p^* , равное отношению числа m^* появлений события A к числу n^*

всех проведенных испытаний, в каждом из которых событие A могло произойти или нет. Итак, $p^* = m^*/n^*$. Эту относительную частоту обозначают также $P^*(A) = p^* = m^*/n^*$.

Пример 1. Пусть A — попадание в цель при выстреле, положим, что сделано 100 выстрелов, при этом попаданий было 51, тогда $p^* = 51/100$.

Пусть испытания проводятся сериями. Если в сериях испытаний число испытаний невелико, то, как показывает опыт, при переходе от одной серии к другой относительные частоты случайного события A изменяются существенно. Иначе дело обстоит в случае, когда в сериях испытаний число испытаний велико. Опыт показывает, что при переходе от серии к серии с большим числом испытаний относительные частоты случайного события A изменяются мало. Значит, относительная частота случайного события приобретает устойчивость, теряет случайность. При этом существует число p , вокруг которого группируются относительные частоты случайного события A в сериях с большим числом испытаний. Группировка происходит тем теснее, чем больше число испытаний. Указанное число p называется *вероятностью* рассмотренного случайного события A и обозначается $P(A) = p$. В этом случае условно пишут $m^*/n^* \rightarrow p$ при $n^* \rightarrow \infty$, но эта запись не означает обычного стремления к числу p величины m^*/n^* при $n^* \rightarrow \infty$. Это *статистическое определение вероятности*.

Случайные события называются *равновозможными*, если ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Случайные события называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе (одновременно) при данном испытании.

Будем говорить, что *случайные события образуют полную группу несовместных событий*, если при каждом испытании обязательно появится какое-либо одно из них и только одно.

Однородный куб, на гранях которого нанесены цифры от 1 до 6, называется *игральной костью*. При бросании игральной кости будем следить за появлением цифры на верхней ее грани. При этом может произойти любое из следующих шести событий: появление цифры 1; появление цифры 2; появление цифры 3; появление цифры 4; появление цифры 5; появление цифры 6. Эти шесть событий образуют полную группу, так как при каждом бросании обязательно появляется какое-либо одно из них и только одно. В то же время первые пять из этих событий не образуют полную группу, так как появление цифры 6 на верхней грани игральной кости будет означать, что при этом испытании ни одно из пяти названных событий не появилось.

Случайное событие из полной группы называют *благоприятствующим данному случайному событию* A , если появление этого события влечет за собой появление события A .

Дадим классическое определение вероятности случайного события.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных событий и выделим из них события, благоприятствующие данному случайному событию A .

Вероятностью p случайного события A называется отношение числа m событий, благоприятствующих событию A , к общему числу n событий, образующих полную группу равновозможных несовместных событий. Эту вероятность обозначают также $P(A)$. Итак,

$$P(A) = p = \frac{m}{n}. \quad (22.1)$$

Это — *классическое определение вероятности*.

Пример 2. Пусть случайное событие A есть появление на верхней грани игральной кости при ее бросании цифры, меньшей или равной двум. Из вышеперечисленных равновозможных событий событию A благоприятствуют два — появление цифры 1 и появление цифры 2, т. е. $m = 2$. Общее число событий полной группы $n = 6$. Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6}.$$

Пример 3. При бросании монеты появление надписи и появление орла (герба) — это события, образующие полную группу, так как при каждом бросании монеты одно из названных событий обязательно появляется, причем только одно. Таким образом, число событий, образующих полную группу, $n = 2$. Пусть A означает появление надписи. Этому событию из вышеуказанных двух благоприятствует лишь одно — само это событие, следовательно, $m = 1$. Значит, вероятность появления надписи $P(A) = 1/2$.

Достоверному событию A благоприятствуют все события, образующие полную группу, поэтому его вероятность согласно (22.1) равна 1, так как $n = m$.

Невозможному событию не благоприятствует ни одно из событий, образующих полную группу. Вероятность этого события равна нулю, так как $m = 0$.

Из вышесказанного ясно, что вероятность p случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей ($0 \leq p \leq 1$).

В разных ситуациях событие может быть достоверным, возможным, невозможным. Например, при бросании игральной кости появление цифры 7 на ее верхней грани есть событие невозможное, но если на

одной грани нанести цифру 7 вместо какой-либо другой, то это событие станет возможным.

На практике классическое определение вероятности применяется редко, так как чаще всего события не являются равновероятными. Иногда бывает невозможно выделить конечное число событий, образующих полную группу, и найти среди них благоприятствующие данному событию. Поэтому чаще применяется статистическое определение вероятности. Опыт показывает, что эти определения дают один и тот же результат. Например, вероятность появления 1 при бросании игральной кости, согласно классическому определению вероятности, равна $1/6$. С другой стороны, если провести испытания с бросанием игральной кости сериями, с большим числом испытаний в каждой серии, то относительные частоты появления 1 на верхней грани группируются около числа $1/6$. Согласно статистическому определению вероятности это число и есть вероятность данного события.

Как уже отмечалось, возможности применения классического определения весьма ограничены, а статистическое определение отличается очевидной нестрогостью. Для того чтобы эту нестрогость устранить, при некоторых предположениях используют понятие *геометрической вероятности*. Оно вводится следующим образом.

Дан отрезок L длины L' , l' — длина произвольно выбранной его части l . На отрезок бросают точку. Вероятностью попадания точки на часть l называют число, равное $p = l'/L'$, если это число не зависит от положения l на отрезке L .

Аналогично поступают, когда задается плоская область D с площадью D' и в этой области наудачу ставится точка.

Пусть область d с площадью d' есть произвольная часть области D . Вероятностью попадания точки в область d называют число, равное $p = d'/D'$, если это число не зависит от положения и формы d .

О наиболее строгом изложении теории вероятностей, основанном на аксиомах, см. в § 23.20.

При любом подходе к определению вероятности p случайного события имеем: $0 \leq p \leq 1$, вероятность достоверного (невозможного) события равна $p = 1$ ($p = 0$).

§ 22.2. Вероятность суммы несовместных событий

Суммой двух несовместных случайных событий A_1 и A_2 называется событие, состоящее в появлении или A_1 , или A_2 . Сумму обозначим $A_1 + A_2$. Имеет место

Теорема 22.1 (вероятность суммы несовместных событий). Пусть случайные события A_1, A_2 несовместны и их вероятности равны $P(A_1), P(A_2)$. Тогда вероятность суммы этих событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad (22.2)$$

т.е. равна сумме вероятностей исходных несовместных событий.

Доказательство. Пусть из n событий, образующих полную группу, m_1 событий благоприятствуют A_1 , а m_2 событий благоприятствуют A_2 . Тогда согласно классическому определению вероятности $P(A_1) = m_1/n$ и $P(A_2) = m_2/n$. Заметим, что вышеуказанные m_1 событий из полной группы, благоприятствующих A_1 , и m_2 событий, благоприятствующих A_2 , не имеют ни одного общего события, так как одно и то же событие полной группы не может благоприятствовать двум различным несовместным событиям. Поэтому сумме рассматриваемых событий $A_1 + A_2$ благоприятствует $(m_1 + m_2)$ событий из полной группы n событий. Таким образом, вероятность указанной суммы $P(A_1 + A_2) = (m_1 + m_2)/n = m_1/n + m_2/n$. Подставив сюда в правую часть вероятности событий A_1 и A_2 , получим (22.2). Теорема доказана.

Аналогично определяется сумма трех или большего числа несовместных случайных событий $A_1, A_2, \dots, A_N$. Сумма $A_1 + A_2 + \dots + A_N$ означает появление или A_1 , или $A_2, \dots$, или A_N . Как и для (22.2), можно показать, что вероятность этой суммы

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_N) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N). \quad (22.3)$$

Пример. По мишени, состоящей из трех непересекающихся зон I, II, III, производится один выстрел. Вероятности событий A_1, A_2, A_3 — попадания в зоны I, II, III соответственно — известны:

$$P(A_1) = \frac{5}{100}, \quad P(A_2) = \frac{10}{100}, \quad P(A_3) = \frac{15}{100}.$$

Нужно найти вероятность попадания в мишень.

Попадание в мишень означает попадание или в зону I, или в зону II, или в зону III, т.е. означает сумму указанных несовместных событий. Искомая вероятность этой суммы определяется по формуле (22.3):

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{30}{100}.$$

Следствие из теоремы 22.1. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма вероятностей этих событий равна единице, т.е.

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (22.4)$$

Доказательство. Событие $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ означает появление или A_1 , или $A_2, \dots$, или A_n , следовательно, эта сумма есть

достоверное событие и его вероятность $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$. Левую часть запишем по формуле (22.3), взяв в последней $N = n$, и получим (22.4).

§ 22.3. Противоположные и совместные события. Вероятность произведения независимых событий

Событие $\bar{A}$ называют *противоположным* событию A , если событие $\bar{A}$ состоит в неосуществлении события A . Очевидно, что противоположные события образуют полную группу, поэтому согласно (22.4) сумма их вероятностей равна единице, т. е. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пример 1. Производится один выстрел по мишени. Пусть событие A — попадание в мишень, вероятность этого события известна и равна $P(A) = p$. Нужно найти вероятность промаха.

Промех и попадание в мишень — это противоположные события. Поскольку при каждом выстреле одно из них происходит, значит, они образуют полную группу несовместных событий. Следовательно, $p + P(\bar{A}) = 1$. Отсюда находим искомую вероятность промаха $P(\bar{A}) = 1 - p$.

События A и B называются *совместными*, если они могут появиться вместе (одновременно) при данном испытании.

Событие, состоящее в одновременном появлении событий A и B при данном испытании, называется *произведением (совмещением)* этих событий и обозначается AB .

Пример 2. Если из двух орудий производится по одному выстрелу по мишени и событие A означает попадание в мишень первым орудием, событие B — вторым орудием, то AB означает попадание в мишень обоими орудиями.

Случайное событие A называется *независимым* от случайного события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B или нет. В примере 2 событие A не зависит от события B , так как вероятность поражения мишени первым орудием не зависит от результата стрельбы из второго орудия.

Теорема 22.2. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей исходных событий, т. е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (22.5)$$

Доказательство. Воспользуемся схемой урн с шарами.

Пусть имеются две урны с шарами. В первой находится n_1 шаров: из них m_1 — красные, остальные — черные. Во второй урне — n_2 шаров, из них m_2 — красные, остальные — черные. Все шары в каждой из урн считаем разными, например, можно считать, что все шары

пронумерованы. При извлечении одного шара из первой урны возможно появление любого из n_1 шаров, т. е. возможно появление n_1 различных случайных событий, поскольку появление каждого шара представляет отдельное событие. Таким образом, имеем n_1 событий, образующих полную группу несовместных событий, так как при каждом извлечении (испытании) одно из событий обязательно происходит. Пусть событие A — появление красного шара из первой урны. Ему благоприятствует m_1 событий из вышеперечисленных n_1 , так как в урне всего m_1 красных шаров. Итак, $P(A) = m_1/n_1$. Пусть событие B означает появление красного шара из второй урны при извлечении из нее одного шара. Ясно, что его вероятность $P(B) = m_2/n_2$.

Изменим ситуацию. Пусть теперь испытание заключается в том, что из каждой из двух урн одновременно извлекают по одному шару. Нас интересует появление двух красных шаров вместе, т. е. произведение событий AB , и нужно найти вероятность этого события. При извлечении по одному шару из каждой из двух урн возможно появление n_1n_2 различных случайных событий, образующих полную группу, так как каждый из n_1 шаров первой урны может оказаться вынутым вместе с любым из n_2 шаров второй урны. Из этих n_1n_2 событий событию AB благоприятствуют m_1m_2 событий. Таким образом, искомая вероятность $P(AB) = (m_1m_2)/(n_1n_2)$, или $P(AB) = (m_1/n_1)(m_2/n_2)$. Подставив в правую часть $P(A)$ и $P(B)$, получим искомую формулу. Теорема доказана.

Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_N$ совместны, т. е. могут появиться вместе (одновременно) при данном испытании. Это совместное появление будем обозначать $A_1A_2 \dots A_N$ и называть *произведением исходных событий*. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми*, если вероятность любого события не зависит от того, произошли остальные события или нет. Вероятность произведения для независимых событий определяется формулой

$$P(A_1A_2 \dots A_N) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_N),$$

получаемой на основании (22.5).

Пример 3. Из двух орудий стреляют по одной цели. Событие A есть попадание в цель из первого орудия, его вероятность $P(A) = 8/10$, событие B — попадание в цель из второго орудия, его вероятность $P(B) = 7/10$. Найти вероятность одновременного попадания в цель из обоих орудий, т. е. вероятность $P(AB)$.

Так как рассматриваемые события независимы, то искомая вероятность определяется формулой (22.5), и мы имеем $P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

§ 22.4. Вероятность суммы совместных событий. Зависимые события. Условная вероятность

Суммой двух совместных событий A и B называется случайное событие, состоящее в появлении или A , или B , или обоих событий вместе, т.е. произведения AB . Эта сумма обозначается, как и раньше, $A + B$.

Теорема 22.3 (о вероятности суммы совместных событий). *Если A и B — совместные случайные события, то вероятность их суммы определяется формулой*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (22.6)$$

Доказательство. Пусть из n событий, образующих полную группу, m_1 событий благоприятствуют событию A , а m_2 событий благоприятствуют событию B , тогда $P(A) = m_1/n$, $P(B) = m_2/n$. Но среди указанных m_1 событий, благоприятствующих событию A , имеются события, благоприятствующие событию AB , когда событие A появляется вместе с событием B . Число таких событий обозначим m_* . Тогда $P(AB) = m_*/n$. Ясно, что эти m_* событий входят и в число m_2 событий, благоприятствующих B . Следовательно, событию $A + B$, состоящему в появлении или A , или B , или AB , благоприятствуют $(m_1 + m_2 - m_*)$ событий из n событий полной группы. Поэтому вероятность рассматриваемой суммы событий

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - m_*}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_*}{n}.$$

Выразив числа в правой части через соответствующие вероятности, получим (22.6).

Если события A и B независимы, то согласно (22.5)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \quad (22.7)$$

Пример 1. В условиях примера 3 из § 22.3 найти вероятность поражения цели.

Поражение цели означает или попадание из первого орудия (событие A), или попадание из второго орудия (событие B), или попадание в цель из обоих орудий вместе (событие AB). Таким образом, поражение цели означает сумму $A + B$ рассматриваемых совместных независимых случайных событий, поэтому искомая вероятность определяется по формуле (22.7):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94.$$

Введем еще несколько определений.

Событие A называется *зависимым от события B* , если вероятность появления события A зависит от того, произошло ли событие B или нет.

Вероятность события A при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью A при условии B* и обозначается $P(A|B)$.

Пример 2. Пусть в урне находятся три белых шара и два черных. Из урны извлекают один шар. Пусть при этом событие B означает появление белого шара. Так как из пяти шаров в урне — три белых, то вероятность $P(B) = 3/5$.

Появление черного шара есть событие $\bar{B}$, противоположное B . В самом деле, при каждом извлечении шара появляется либо белый шар — событие B , либо черный шар — событие $\bar{B}$. Эти события несовместны и образуют полную группу, являются противоположными событиями. Вероятность события $\bar{B}$ равна $P(\bar{B}) = 2/5$, так как из пяти шаров — два черных.

Изменим ситуацию. Пусть испытания заключаются в том, что из урны извлекают один за другим два шара, не возвращая при этом первый вынутый шар обратно (можно считать, конечно, что эти шары извлекаются одновременно: один шар — левой рукой, другой — правой).

Пусть первый вынутый шар — белый, т.е. произошло событие B . Пусть событие A заключается в появлении белого шара при втором извлечении, тогда условная вероятность события A — появления белого шара при втором извлечении при условии, что первый шар оказался белым, — равна $P(A|B) = 2/4$, так как в урне теперь осталось четыре шара, из которых два белых.

Пусть первый шар оказался черным, т.е. произошло событие $\bar{B}$, теперь в урне осталось четыре шара, из них три белых. Тогда условная вероятность события A — появления белого шара при втором извлечении при условии, что первый вынутый шар черный, — равна $P(A|\bar{B}) = 3/4$. Мы записали две условные вероятности одного и того же события A .

Теорема 22.4 (о вероятности произведения зависимых событий). *Вероятность произведения зависимых событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что произошло первое, т.е.*

$$P(AB) = P(B)P(A|B). \quad (22.8)$$

Доказательство. Воспользуемся схемой урн с шарами. Пусть в урне имеется n шаров, из них n_1 шаров — белые, остальные черные.

Среди n_1 белых шаров имеется n_1^* отмеченных, среди черных шаров тоже могут быть отмеченные.

Из урны извлекается один шар. Пусть B — событие, означающее появление белого шара. Так как среди n шаров в урне есть n_1 белых шаров, то

$$P(B) = \frac{n_1}{n}. \quad (22.9)$$

Пусть событие A означает появление отмеченного шара. Пусть извлеченный шар оказался белым, т. е. произошло событие B . Запишем условную вероятность события A — появления отмеченного шара при условии, что появился белый шар, т. е. при условии B . Так как среди n_1 белых шаров (только они интересуют нас сейчас, так как появился белый шар) имеется n_1^* отмеченных шаров, то указанная условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{n_1^*}{n_1}. \quad (22.10)$$

Возьмем событие, представляющее произведение AB . Оно означает появление помеченного шара (событие A) и белого шара (событие B), т. е. появление помеченного белого шара. Так как среди n шаров в урне имеется n_1^* белых шаров, отмеченных звездочкой, то вероятность рассматриваемого события

$$P(AB) = \frac{n_1^*}{n}. \quad (22.11)$$

Умножив и поделив на n_1 , запишем $\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}$. Подставив сюда вероятности из формул (22.9)–(22.11), получим (22.8). Теорема доказана.

Пример 3. Рассмотрим вероятность $P(AB)$ произведения событий, указанных в предыдущем примере (с тремя белыми и двумя черными шарами в урне).

Пусть B — появление белого шара при первом извлечении, когда шар в урну не возвращается, A — появление белого шара при втором извлечении. Тогда вероятность появления двух белых шаров, одного за другим, согласно формуле (22.8) равна $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$. Подставим сюда вероятности, указанные в предыдущем примере: $P(AB) = (3/5) \cdot (2/4) = 3/10$.

В формуле (22.8) поменяем ролями события A , B , т. е. вместо A будем писать B и наоборот. В этом случае $P(BA) = P(A) \cdot P(B|A)$. Но вероятности в левых частях в последней формуле и в формуле (22.8) равны, так как события BA и AB — это одно и то же событие. Следовательно, равны и правые части указанных формул, т. е. получим

$$P(A)P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (22.12)$$

Замечание. Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A .

В самом деле, условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A|B) = P(A)$. Но из этого условия (при $P(A) \neq 0$) из (22.12) следует $P(B|A) = P(B)$, т.е. событие B не зависит от события A .

§ 22.5. Формула полной вероятности

Теорема 22.5 (о полной вероятности). Пусть случайное событие A может произойти только вместе с любым из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу несовместных событий. Тогда вероятность события A определяется так называемой формулой полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n). \quad (22.13)$$

Доказательство. Так как событие A может произойти только вместе с любым из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу несовместных событий, то появление события A означает появление или AB_1 , или AB_2 , ..., или AB_n , т.е. появление суммы перечисленных событий. Значит, $P(A) = P(AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n)$. Поскольку справа под знаком вероятности стоит сумма несовместных событий, то эта вероятность равна сумме вероятностей слагаемых событий:

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n). \quad (22.14)$$

В формуле (22.8) B заменим на B_1 , затем на B_2 , ..., наконец, на B_n . Тогда

$$P(AB_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1), \quad P(AB_2) = P(B_2) \cdot P(A|B_2), \quad \dots \\ \dots, \quad P(AB_n) = P(B_n) \cdot P(A|B_n).$$

Подставив эти выражения в правую часть формулы (22.14), придем к формуле (22.13). Теорема доказана.

Пример. Имеется два набора деталей. Из наудачу взятого набора наудачу выбирается деталь. Известно, что вероятность появления стандартной детали из первого набора равна 0,8, а из второго — 0,9. Найти вероятность появления стандартной детали.

Пусть случайное событие B_1 означает появление детали из первого набора, событие B_2 — появление детали из второго набора. Эти два события равновозможны, несовместны и образуют полную группу, так как при каждом испытании появляется либо B_1 , либо B_2 . Таким образом, $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$.

Пусть событие A означает появление стандартной детали. По условию примера условная вероятность появления стандартной детали

Пусть событие A означает появление надежного прибора. По условию примера вероятность A при условии, что появился прибор, собранный специалистом высшей квалификации, $P(A|B_1) = 0,9$. Аналогично вероятность появления надежного прибора при условии, что появился прибор, собранный специалистом средней квалификации, $P(A|B_2) = 0,8$. Искомая вероятность появления прибора, собранного специалистом высшей квалификации, т. е. события B_1 при условии, что появилось событие A , определяется по формуле

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)}.$$

Подставим данные и получим $P(B_1|A) = 0,27/0,83$.

§ 22.7. Повторные испытания.

Формула Бернулли

Пусть имеется урна с красными и белыми шарами. Из урны извлекается один шар. Пусть случайное событие A — появление красного шара, вероятность этого события $P(A) = p$. Будем считать, что эта вероятность известна, она равна отношению числа красных шаров в урне к общему числу шаров в урне. При извлечении одного шара из урны появление белого шара — событие $\bar{A}$, противоположное A . В самом деле, при каждом извлечении одного шара из урны появляется либо красный шар — событие A , либо белый шар — событие $\bar{A}$. Они образуют полную группу и являются противоположными. Пусть $P(\bar{A}) = q$. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е. $p + q = 1$. Значит, $q = 1 - p$.

Пусть теперь испытание состоит в том, что из урны n раз извлекают по одному шару, возвращая его каждый раз обратно в урну. Пусть событие D , — появление k раз красных шаров и $(n - k)$ раз белых шаров. Нужно найти вероятность $P(D)$ этого события.

Событие D может осуществляться, например, в виде события B_1 , которое означает появление красных шаров (событие A) при извлечениях с номерами $1, 2, 3, 4, \dots, k$ и появление белых шаров (событие $\bar{A}$) при извлечениях с номерами $k + 1, k + 2, \dots, n$. Это означает, что B_1 есть следующее произведение:

$$B_1 = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{n-k}.$$

Но в правой части стоят независимые события, следовательно, вероятность их произведения равна произведению вероятностей исходных событий, поэтому

$$P(B_1) = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_k \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Событие D может осуществиться еще, например, в виде события B_2 , которое означает появление красных шаров (события A) при извлечениях с номерами $2, 3, 4, \dots, k, k+1$ и появление белых шаров (событие $\bar{A}$) при всех остальных извлечениях. Тогда

$$B_2 = \bar{A} \cdot \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{n-k-1}.$$

Вероятность этого события

$$P(B_2) = q \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_k \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-k-1} = p^k \cdot q^{(n-k)}.$$

Вообще, событие D может осуществляться в виде или события B_1 , или B_2 , или любого другого события, в котором красные шары появляются k раз, а белые появляются $(n-k)$ раз при извлечениях с определенными номерами. При этом все эти события имеют одну и ту же вероятность, равную $p^k q^{n-k}$, и они несовместны, так как одно событие отличается от другого хотя бы одним порядковым номером извлечения, при котором появляется красный шар. Число этих событий обозначим N , причем $N = C_n^k$ — числу сочетаний из n элементов по k . Напомним, что сочетаниями называют комбинации, содержащие по k элементов из n различных элементов и отличающиеся хотя бы одним элементом. Итак, событие D означает появление или B_1 , или B_2 , ..., или B_N , т. е. $D = B_1 + B_2 + \dots + B_N$. Поэтому $P(D) = P(B_1 + B_2 + \dots + B_N)$. Но сумма справа под знаком вероятности есть сумма несовместных событий. Поэтому $P(D) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_N)$. Все вероятности справа равны $p^k q^{(n-k)}$ значит, $P(D) = N p^k q^{(n-k)} = C_n^k p^k q^{(n-k)}$. Обозначим левую часть последней формулы через $P_n(k)$. Итак,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p. \quad (22.15)$$

Каждое извлечение шара из урны есть отдельное испытание. Поэтому формула (22.15) дает вероятность появления k раз события A при n одинаковых испытаниях, когда во всех испытаниях вероятность события A одинакова и равна p ; она называется *формулой Бернулли*.

Число сочетаний C_n^k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}. \quad (22.16)$$

И в числителе, и в знаменателе правой части этой формулы содержится k сомножителей. Из формулы (22.16) легко получим $C_n^{n-k} = C_n^k$. Имеем:

$$C_n^n = C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = \frac{n}{1}, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots$$

Пример. Игральную кость бросают восемь раз. Найти вероятность появления три раза цифры 1 на верхней грани игральной кости.

Пусть случайное событие A есть появление цифры 1 на верхней грани при одном бросании. Вероятность этого события $P(A) = p = 1/6$. При этом $q = 1 - p = 5/6$. Число испытаний $n = 8$, нужно найти вероятность появления три раза события A . При $k = 3$ по формуле (22.15) имеем

$$P_8(3) = C_8^3 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6^5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^5}{6^5} \approx 0,1042.$$

При больших значениях n формула Бернулли (22.15) приводит к громоздким вычислениям, поэтому вероятность $P_n(k)$ находят по следующей приближенной формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эта формула называется *формулой Муавра–Лапласа*. В силу сложности вывод ее опущен.

Однако формула Муавра–Лапласа непригодна, если вероятность p мала. В связи с этим используют другую приближенную формулу, получаемую следующим образом.

Положим $np = \lambda$, считая, что λ остается постоянной величиной, когда изменяются n и p . Тогда $p = \lambda/n$, $q = 1 - p = 1 - \lambda/n$. Подставим эти выражения и выражение (22.16) в формулу (22.15), в полученном соотношении перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda} \right]^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

В этом соотношении $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$ заменим на $P_n(k)$, учитывая, что при больших значениях n эти величины мало отличаются друг от друга, и получим приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Эта формула называется *формулой Пуассона*, она применима для больших значений n и малых значений p . Имеет место также интегральная теорема Муавра–Лапласа, которая здесь приводится без доказательства. n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , то $P_n(k_1, k_2)$ — вероятность появления A не менее k_1 раз и не более k_2 раз — приближенно находится по формуле

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} dt,$$

где $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$, $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$, $q = 1 - p$. Эта формула тем точнее, чем больше n . Интеграл в этой формуле формулы можно выразить через функцию Лапласа (§ 23.5).

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 23.1. Дискретная случайная величина. Закон распределения

Пусть рассматривается величина X , которая при каждом испытании обязательно принимает одно и только одно значение из данного набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_N$. Заранее неизвестно, какое из этих значений X примет; для каждого $k = 1, 2, 3, \dots, N$ известна лишь вероятность p_k , того, что X примет значение x_k . Такая величина называется *дискретной случайной величиной*.

Эти N событий (X принимает значение x_k) образуют полную группу, так как при каждом испытании одно из этих событий обязательно произойдет и только одно. При этом согласно (22.4) сумма вероятностей равна единице, т. е. $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$, или

$$\sum_{k=1}^N p_k = 1. \quad (23.1)$$

Правило, выражающее зависимость между значениями x_k величины X и их вероятностями p_k , называется *законом распределения вероятностей дискретной случайной величины X* . Эта зависимость может быть задана аналитически в виде формулы $p_k = f(x_k)$, где f — известная функция. По ней, зная x_k , находят p_k для любого $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Эту зависимость задают также с помощью таблицы, в первой строке которой записывают все возможные значения X , а во второй строке — соответственно значения вероятностей указанных значений x_k . Эта таблица имеет вид

Таблица 23.1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

Здесь $P(X = x_k)$ есть вероятность того, что X примет значение x_k .

Иногда рассматривают дискретные случайные величины, которые в результате испытаний принимают то или иное значение из бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. При этом в формуле (23.1) в левой части будет стоять сумма бесконечного числа вероятностей указанных значений X , и формула (23.1) примет вид $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Пример. Пусть X — число очков на верхней грани игральной кости при ее бросании. Ясно, что при каждом испытании X примет одно и только одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6. Таким образом, закон распределения вероятностей рассматриваемой случайной величины X определяется таблицей

Таблица 23.2

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пусть испытания проводятся сериями по n испытаний в каждой. При каждом испытании событие A может появиться или нет, причем вероятность появления события A во всех испытаниях одинакова и равна p . Это число $P(A) = p$ считаем известным. В каждой серии из n испытаний случайное событие A может не появиться ни разу, может появиться один раз, два раза, ..., может появиться n раз. Пусть X — относительная частота появлений события A в каждой серии из n испытаний, т.е. число появлений A в данной серии, поделенное на n — общее число испытаний. Таким образом, в сериях по n испытаний X может принять любое из следующих значений: $0/n, 1/n, 2/n, \dots, n/n$. Вероятность того, что X примет значение k/n , обозначим через $P(X = k/n)$. Но если X принимает значение k/n , то это означает, что в данной серии из n испытаний событие A появилось k раз, поэтому вероятность $P(X = k/n)$ равна вероятности появления k раз события A в серии из n испытаний. С другой стороны, эта вероятность есть $P_n(k)$ и определяется формулой (22.15). Итак, $P(X = k/n) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$. Подставив сюда поочередно значения $k = 0, 1, 2, \dots, n$, получим закон распределения вероятностей рассматриваемой величины X в виде таблицы

Таблица 23.3

X	0	$1/n$	$2/n$	...	k/n	...	1
$P(X = x_k)$	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Согласно определению дискретной случайной величины сумма всех вероятностей этой таблицы равна единице:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

В справедливости последнего соотношения можно убедиться непосредственно на основании известной формулы бинома Ньютона $(p + q)^n$ при $p + q = 1$.

Предлагаем самостоятельно записать последнюю таблицу для случая, когда $n = 8$, $p = 1/2$.

§ 23.2. Непрерывная случайная величина. Функция распределения

Непрерывной случайной величиной называется величина, которая может принимать все значения из некоторого интервала. Этот интервал будем называть *интервалом всех возможных значений* рассматриваемой случайной величины.

Данное определение нуждается в уточнении, это будет сделано ниже. Приведем пример непрерывной случайной величины.

Пусть из орудия, расположенного в начале координат, ведется стрельба вдоль оси Ox в положительном направлении. Пусть при этом a и b — соответственно наименьшая и наибольшая дальности полета снаряда при стрельбе из данного орудия, X — дальность полета снаряда. При каждом выстреле величина X примет некоторое значение x из интервала (a, b) , но заранее не известно, какое именно. Интервал (a, b) есть интервал возможных значений X .

Пусть X — непрерывная случайная величина, интервал возможных значений которой есть $(-\infty, +\infty)$, и x — некоторая точка этого интервала. Рассмотрим событие, состоящее в том, что значение величины X попадет в интервал $(-\infty, x)$. Это событие коротко будем называть событием $-\infty < X < x$ или событием $X < x$. Вероятность его $P(-\infty < X < x) = P(X < x)$ зависит от выбора x , т.е. является функцией от x ; обозначим эту функцию

$$F(x) = P(X < x), \quad (23.2)$$

и назовем *функцией распределения случайной величины* X .

Пусть x_1, x_2 — две произвольные точки интервала $(-\infty, \infty)$, причем $x_2 > x_1$. Событие $X < x_2$ есть сумма двух несовместных событий $X < x_1$ и $x_1 \leq X < x_2$, поэтому согласно теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Но в силу (23.2) $P(X < x_2) = F(x_2)$, $P(X < x_1) = F(x_1)$, поэтому

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2). \quad (23.3)$$

Так как $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$ (поскольку вероятность не может быть отрицательной), из соотношения (23.3) получим $F(x_2) \geq F(x_1)$ для $x_2 > x_1$. Следовательно, $F(x)$ — неубывающая функция.

В пределе при $x \rightarrow -\infty$ формула (23.2) дает $F(-\infty) = P(X < -\infty)$. Но $X < -\infty$ — невозможное событие, его вероятность равна нулю, поэтому $F(-\infty) = 0$. Аналогично, согласно (23.2) имеем $F(+\infty) = P(X < +\infty)$. Поскольку $X < +\infty$ — достоверное событие и его вероятность равна единице, то $F(+\infty) = 1$. Теперь ясно, что график функции $F(x)$ на плоскости Oxy может иметь, например, вид, показанный на рис. 23.1.

В дальнейшем под непрерывной случайной величиной будем понимать величину, функция распределения которой непрерывна и имеет производную, непрерывную всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Пусть x_1 — произвольно заданная точка; в соотношении (23.3) перейдем к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$. В силу непрерывности $F(x)$ имеем $\lim_{x_2 \rightarrow x_1} F(x_2) = F(x_1)$, вероятность в формуле (23.3) в пределе перейдет в вероятность $P(X = x_1)$ того, что X примет значение x_1 , и мы получим $F(x_1) = F(x_1) + P(X = x_1)$. Таким образом, $P(X = x_1) = 0$.

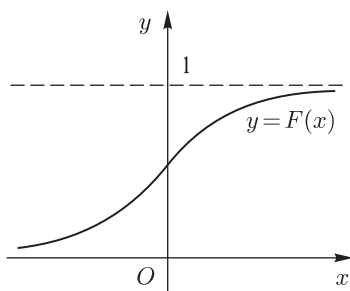


Рис. 23.1

§ 23.3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

В формуле (23.3) положим $x_1 = x$, где x — заданная точка, в которой существует производная $F'(x)$, $x_2 = x + \Delta x$, $\Delta x > 0$. Тогда будем иметь

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \leq X < x + \Delta x).$$

Отсюда, поделив на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (23.4)$$

Здесь предел в правой части (как и в левой части) есть функция от x , которую обозначим $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x), \quad (23.5)$$

и назовем *плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины* (по аналогии с плотностью распределения вещества по телу; см. § 14.7). Левая часть формулы (23.4) равна производной $F'(x)$ в точке x . Итак,

$$F'(x) = f(x). \quad (23.6)$$

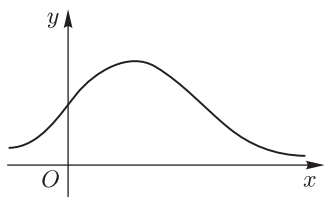


Рис. 23.2

Мы получили формулу, связывающую функцию распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины. Из формулы (23.5)

видно, что $f(x) \geq 0$, так как под знаком предела стоит неотрицательная величина. Функцию $f(x)$ называют также *законом распределения величины X* , а график функции $f(x)$ на плоскости Oxy — *кривой распределения* (рис. 23.2).

§ 23.4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

Пусть (α, β) — некоторый произвольный интервал. В формуле (23.3) заменим вероятность $P(x_1 \leq X < x_2)$ на $P(x_1 < X < x_2)$, поскольку $P(X = x_1) = 0$; далее положим $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ и получим

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (23.7)$$

Эта формула выражает вероятность события, указанного в левой части, через значения функции распределения величины X . Так как $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в силу (23.6), то правая часть (23.7) равна определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по интервалу (α, β) . Следовательно, формулу (23.7) можно записать в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (23.8)$$

Интеграл в (23.8) равен площади криволинейной трапеции, основанием которой служит отрезок (α, β) оси Ox , а сверху трапеция ограничена соответствующей частью кривой $y = f(x)$ (рис. 23.3). Этой же площади равна вероятность в левой части формулы (23.8).

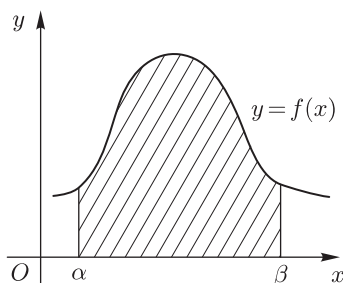


Рис. 23.3

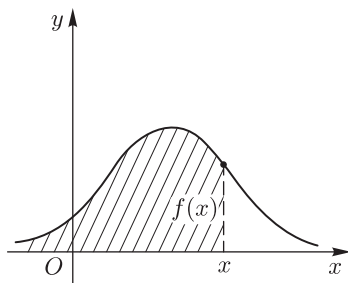


Рис. 23.4

В формулах (23.7) и (23.8) положим $\beta = x$ и перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow -\infty$. Учтывая, что $F(-\infty) = 0$, будем иметь

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (23.9)$$

Интеграл в этой формуле и остальные части соотношения равны площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху частью кривой $y = f(x)$, соответствующей интервалу $(-\infty, x)$, служащему основанием трапеции (рис. 23.4). Перейдем теперь в (23.9) к пределу при $x \rightarrow +\infty$. Учтывая, что $F(+\infty) = 1$, получим условие, которому должна удовлетворять плотность распределения $f(x)$ (кроме условия $f(x) \geq 0$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Можно показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

§ 23.5. Нормальный закон распределения

Опыт показывает, что многие случайные величины, например, ошибки при наблюдениях, отклонения по дальности или боковое отклонение точки попадания от некоторого центра при стрельбе, имеют плотность распределения, которая определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \sigma > 0, \quad (23.10)$$

где a и σ — постоянные, определяемые опытным путем. Этот закон распределения называется *нормальным законом*, или *законом рас-*

пределения Гаусса. График функции (23.10) представлен на рис. 23.5.

Можно показать, что она удовлетворяет соотношению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

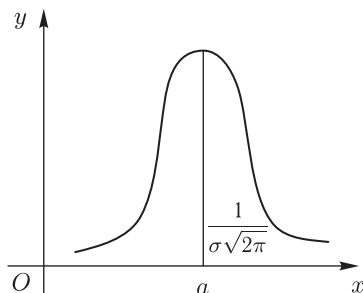


Рис. 23.5

Вероятность попадания непрерывной случайной величины с нормальным законом распределения в интервал (α, β) выражается формулой (23.8). В нее вместо $f(x)$ подставим выражение (23.10) и получим

$$P(\alpha < X < \beta) = [-1\epsilon x] \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (23.11)$$

В интеграле этой формулы сделаем замену переменных

$$\frac{x-a}{\sigma} = t. \quad (23.12)$$

При этом имеем $x = a + \sigma t$, отсюда $dx = \sigma dt$. Кроме того, пределы интеграла $x = \alpha$, $x = \beta$ согласно (23.12) заменим на соответствующие пределы для t : $t = \frac{\alpha-a}{\sigma}$, $t = \frac{\beta-a}{\sigma}$. Теперь формула (23.11) запишется так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt. \quad (23.13)$$

Рассмотрим функцию, называемую *функцией Лапласа*,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (23.14)$$

Ее производная

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (23.15)$$

Отметим свойства функции $\Phi(x)$:

- функция определена для всех x на числовой оси;
- эта функция возрастает всюду в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как ее производная согласно (23.15) положительна;
- $\Phi(0) = 0$, так как в формуле (23.14) при $x = 0$ верхний и нижний пределы интегрирования становятся равными;
- можно показать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1/2$;
- функция $\Phi(x)$ — нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, в чем легко убедиться на основании (23.14).

Из сказанного ясно, что $\Phi(x)$ имеет график, представленный на рис. 23.6.

С учетом (23.15) соотношение (23.13) согласно формуле Ньютона–Лейбница можно представить в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (23.16)$$

Это есть вероятность попадания случайной величины X с нормальным законом распределения в интервал (α, β) . Функ-

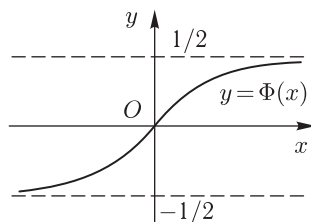


Рис. 23.6

ция $\Phi(x)$, не выражается через элементарные функции. Составлены подробные таблицы ее значений, которые приводятся в справочниках по математике. Таблица значений функции Лапласа дана в приложении (табл. П.1).

§ 23.6. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Пусть X — дискретная случайная величина, закон распределения которой задан в табл. 23.4, где $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ в силу формулы (23.1).

Таблица 23.4

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием случайной величины X называется число, обозначаемое $M(X)$ или m_x и равное сумме произведений всех возможных значений X на вероятности этих значений, т. е.

$$M(X) = m_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

или

$$M(X) = m_x = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (23.17)$$

Математическое ожидание называют также *центром распределения возможных значений случайной величины* X по аналогии с центром тяжести системы материальных точек. Такая аналогия действительно имеет место.

В самом деле, предположим, что на оси Ox в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ находятся материальные точки с массами $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно; тогда, как известно из механики, центр тяжести этой системы материальных точек определяется формулой $x_0 = \sum_{k=1}^n x_k p_k / \sum_{k=1}^n p_k$. Когда сумма в знаменателе равна единице, что имеет место для случайной величины в силу (23.1), выражение для x_0 принимает вид $x_0 = \sum_{k=1}^n x_k p_k$, т. е. получим такую же формулу, что и (23.17) для математического ожидания.

Иногда наряду с рассматриваемой величиной X вводят в рассмотрение дискретную случайную величину $X - m_x$, называемую *центрированной случайной величиной*. Разность $X - m_x$ принимает значения $x_k - m_x$ с вероятностями p_k для $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, закон распределения этой разности получается из табл. 23.4, если в ней x_k заменить на $x_k - m_x$ для всех k . Математическое ожидание разности $X - m_x$, т. е. $M(X - m_x)$, получится из формулы (23.17), если в ней x_k заменить на $x_k - m_x$ для всех k . Легко проверить, что при этом правая часть (23.17) будет равна нулю в силу (23.1). Таким образом, математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Разность $X - m_x$ будем называть *отклонением случайной величины X от ее математического ожидания*.

Для дискретной случайной величины X , закон распределения которой задан в табл. 23.4, а математическое ожидание определяется формулой (23.17), *дисперсией* называют число

$$D(X) = (x_1 - m_x)^2 p_1 + (x_2 - m_x)^2 p_2 + \dots + (x_n - m_x)^2 p_n,$$

или

$$D(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 p_k. \quad (23.18)$$

Дисперсия характеризует рассеивание (разброс) значений величины X относительно ее математического ожидания. В самом деле, чем дальше расположено значение x_k от m_x , тем больше квадраты разностей

$(x_k - m_x)^2$, тем больше слагаемые формулы (23.18), тем больше дисперсия $D(X)$.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называется число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример. Проводится испытание, в котором может появиться событие A , вероятность его появления известна и равна p . Тогда непоявление события A есть событие $\bar{A}$, противоположное событию A , а вероятность $\bar{A}$ равна $q = 1 - p$. Пусть X — число появлений события A при данном испытании. Ясно, что X примет значение $x_1 = 1$, если событие A появится, следовательно, вероятность появления этого значения равна p — вероятности события A . Величина X примет значение $x_2 = 0$, если при данном испытании событие A не появится. Ясно, что вероятность появления этого значения равна q — вероятности события $\bar{A}$. Таким образом, для величины X получим следующую таблицу, определяющую ее закон распределения:

Таблица 23.5

X	1	0
$P(X = x_k)$	p	q

Запишем по формулам (23.17) и (23.18) математическое ожидание

$$M(x) = m_x = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

и дисперсию

$$D(X) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq(p + q) = pq.$$

Перед тем, как изложить свойства математического ожидания и дисперсии, введем следующие определения.

Произведением постоянной C и дискретной случайной величины X называется дискретная случайная величина, обозначаемая CX , возможные значения которой равны произведению постоянной C на соответствующие возможные значения X , а вероятности этих произведений равны вероятностям значений X , входящих в эти произведения.

Дискретные случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие значения приняли другие. В противном случае случайные величины называют *зависимыми*.

Суммой двух независимых дискретных случайных величин X и Y называется случайная величина, обозначаемая $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y , а вероятности этих сумм равны произведениям соответствующих вероятностей. Аналогично определя-

ется сумма любого числа N независимых случайных величин. Проиллюстрируем определение суммы на примере дискретных случайных величин, законы распределения которых заданы в табл. 23.6 и 23.7:

Таблица 23.6

X	x_1	x_2
$P(X = x_k)$	p_1	p_2

Таблица 23.7

Y	y_1	y_2
$P(Y = y_k)$	q_1	q_2

В табл. 23.6 и 23.7 согласно (23.1) должно быть $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$. Согласно определению, закон распределения для суммы $X + Y$ представлен в табл. 23.8:

Таблица 23.8

$X + Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
$P(X + Y)$	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$p_2 \cdot q_1$	$p_2 \cdot q_2$

Произведением двух независимых случайных величин X и Y называется случайная величина, обозначаемая XY , возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y , а вероятности этих произведений равны соответствующим произведениям вероятностей.

Ясно, что закон распределения произведения XY вышеуказанных величин (табл. 23.6, 23.7) получается из табл. 23.8 заменой сумм возможных значений на их произведения.

Теперь мы можем сформулировать свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Пусть X, Y — дискретные независимые случайные величины, $C = \text{const}$, тогда:

- 1) $M(CX) = CM(X)$; 2) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
- 3) $D(CX) = C^2 D(X)$; 4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$;
- 5) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Первое и третье свойства доказываются непосредственно, исходя из формул (23.17) и (23.18) с учетом определения произведения CX .

Докажем второе свойство. Согласно табл. 23.6, 23.7 и 23.8 по формуле (23.17) запишем математические ожидания рассматриваемых величин:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2, \quad M(Y) = y_1 q_1 + y_2 q_2,$$

$$M(X + Y) = (x_1 + y_1)p_1 q_1 + (x_1 + y_2)p_1 q_2 + (x_2 + y_1)p_2 q_1 + (x_2 + y_2)p_2 q_2.$$

В правой части раскроем скобки, учтя, что $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$; тогда останется сумма, которая будет равна сумме величин $M(X) + M(Y)$.

Остальные свойства доказываются аналогично.

Отметим связь между дисперсией и математическим ожиданием. Дисперсия дискретной случайной величины X , заданной в табл. 23.4, вычисляется по формуле (23.18). Рассмотрим теперь величину $(X - m_x)^2$, которая принимает значения $(x_k - m_x)^2$ с вероятностями p_k для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Здесь m_x есть математическое ожидание X , определенное по формуле (23.17). Закон распределения величины $(X - m_x)^2$ получается из табл. 23.4, если в ней x_k заменить на $(x_k - m_x)^2$ для всех k . Но тогда математическое ожидание $M[(X - m_x)^2]$ этой величины определяется по формуле (23.17), в которой x_k надо заменить на $(x_k - m_x)^2$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. При этом получим правую часть формулы (23.18). Итак, $D(X) = M[(X - m_x)^2]$.

Значимость числовых характеристик случайной величины заключается, в частности, в том, что в задачах, связанных с большим числом случайных величин, нередко бывает достаточно знать их числовые характеристики, отвлекаясь от законов распределения этих величин. В грубых расчетах значения случайной величины заменяют ее математическим ожиданием, т. е. некоторым средним значением.

§ 23.7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Пусть X — непрерывная случайная величина, плотность распределения которой равна $f(x)$, а интервалом всех возможных значений служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

Математическим ожиданием рассматриваемой величины называется число, обозначаемое $M(X)$ или m_x , равное

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (23.19)$$

Дисперсией X называется число

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (23.20)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число $\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

При этом нужно иметь в виду следующие определения:

- непрерывные случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли другие величины; в противном случае случайные величины называются *зависимыми*;
- *произведением постоянной C и непрерывной случайной величины X* с плотностью $f(x)$ называется случайная величина, обозначаемая CX , возможные значения которой равны произведениям этой постоянной на соответствующие возможные значения X и плотность распределения вероятностей которой равна $f(x)$;
- *суммой двух непрерывных независимых случайных величин X и Y* с плотностями распределения вероятностей, соответственно равными $f_1(x)$, $f_2(y)$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, называется случайная величина, обозначаемая $X + Y$, возможные значения которой равны суммам соответствующих возможных значений X и x . плотность распределения вероятностей этой суммы выражается формулой

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(z-t) dt, \quad z = x + y;$$

аналогично определяется сумма трех или большего числа независимых случайных величин;

- произведением двух непрерывных случайных величин X и Y называется случайная величина, обозначаемая XY , возможные значения которой равны произведениям соответствующих возможных значений X и Y .

Доказанные выше для дискретной случайной величины свойства математического ожидания и дисперсии остаются в силе и для непрерывных независимых случайных величин.

Рассмотрим теперь числовые характеристики непрерывной случайной величины X , имеющей нормальный закон распределения. Выражение (23.10) подставим в (23.19). После вычислений, которые опускаем, получим $M(x) = m_x = a$. Число $M(x) = a$ и функцию (23.10) подставим в (23.20). После вычислений получим $D(X) = \sigma^2$. Отсюда среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) = \sigma$. Здесь дисперсия характеризует рассеивание (разброс) значений X относительно математического ожидания $M(X) = a$.

Считая, что k — заранее заданное малое положительное число, на оси Ox возьмем интервал $(a - k, a + k)$. Вероятность $P(a - k < X < a + k)$ попадания X в этот интервал равна площади криволинейной трапеции, основанием которой служит $(a - k, a + k)$,

а сверху трапеция ограничена соответствующей частью кривой $y = f(x)$. Эта вероятность и указанная площадь тем больше, чем меньше σ . Таким образом, чем меньше дисперсия σ^2 , тем больше указанная вероятность, следовательно, тем чаще X попадает в указанный интервал.

В теории вероятностей числовые характеристики случайных величин играют важную роль. Нередко встречаются задачи, при решении которых достаточно знать числовые характеристики случайных величин, а законы их распределения не используются. Приближенные значения математического ожидания и дисперсии могут быть найдены, например, опытным путем (§ 24.2).

Пример. Пусть X — непрерывная случайная величина с нормальным законом распределения. Найти вероятность попадания X в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Воспользуемся формулой (23.16), положив $\alpha = a - 3\sigma$, $\beta = a + 3\sigma$. Тогда $P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3)$. Но $\Phi(x)$ — функция нечетная, поэтому $\Phi(-3) = -\Phi(3)$. Таким образом,

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = 2\Phi(3).$$

Из табл. П.1 значений $\Phi(x)$ найдем $2\Phi(3) \approx 0,997$. Поэтому предыдущая формула примет вид $P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 0,997$. Следовательно, эта вероятность очень близка к единице. Таким образом, событие, состоящее в том, что значение X попадает в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$, является почти достоверным. Это означает, что указанное событие, как правило, всегда происходит, и значение X , как правило, находится в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$, центр которого есть $a = m_x$ — математическое ожидание X . Это правило называется *правилom трех сигм*.

§ 23.8. Неравенство Чебышёва

Пусть X — дискретная случайная величина, закон распределения которой задан таблицей

Таблица 23.9

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	$\dots$	x_n
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k	p_{k+1}	p_{k+2}	$\dots$	p_n

Ее математическое ожидание $M(X) = m_x$ определяется формулой (23.17).

Запишем дисперсию этой величины, выделив в ней члены, содержащие $x_k, x_{k+1}, \dots$:

$$\begin{aligned} D(X) = & (x_1 - m_x)^2 p_1 + (x_2 - m_x)^2 p_2 + \dots \\ & \dots + (x_k - m_x)^2 p_k + (x_{k+1} - m_x)^2 p_{k+1} + (x_{k+2} - m_x)^2 p_{k+2} + \dots \\ & \dots + (x_n - m_x)^2 p_n. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 23.1 (о неравенстве Чебышёва). *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше положительного числа ε , удовлетворяет неравенству Чебышёва*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (23.22)$$

Доказательство. Рассмотрим два события $|X - M(X)| < \varepsilon$ и $|X - M(X)| \geq \varepsilon$. При каждом испытании одно из этих событий обязательно произойдет, причем только одно. Это означает, что указанные события образуют полную группу и являются противоположными, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Тогда

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \quad (23.23)$$

Будем считать, что в исходной таблице значения X расположены так, что первые k значений удовлетворяют неравенству $|x_i - m_x| < \varepsilon$, а остальные удовлетворяют неравенству $|x_i - m_x| \geq \varepsilon$, т. е.

$$|x_1 - m_x| < \varepsilon, \quad |x_2 - m_x| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |x_k - m_x| < \varepsilon, \quad (23.24)$$

$$|x_{k+1} - m_x| \geq \varepsilon, \quad |x_{k+2} - m_x| \geq \varepsilon, \quad \dots, \quad |x_n - m_x| \geq \varepsilon. \quad (23.25)$$

Событие $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ произойдет в случае, когда X примет какое-либо значение, входящее в неравенства (23.25). Значит, рассматриваемое событие означает, что X примет или значение x_{k+1} , или x_{k+2} , ..., или x_n . Итак, рассматриваемое событие представляет собой сумму только что перечисленных несовместных событий. Поэтому его вероятность равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n. \quad (23.26)$$

Правую часть формулы (23.21) уменьшим следующим образом: отбросим там все квадраты разностей, удовлетворяющих неравенствам (23.24), а квадраты остальных разностей, удовлетворяющих неравенствам (23.25), заменим меньшими или равными числами ε^2 . Теперь из (23.21) следует, что $D(X) \geq \varepsilon^2(p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n)$. Согласно (23.26) получим $D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$. Это неравенство

умножим на отрицательное число $-\varepsilon^{-2}$, при этом знак неравенства изменится на обратный. Затем к обеим частям неравенства прибавим по единице, тогда получим

$$1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Левая часть последнего неравенства согласно (23.23) равна вероятности $P(|X - M(X)| < \varepsilon)$. Пришли к неравенству (23.22). Теорема доказана.

Неравенство Чебышёва имеет большое теоретическое значение, но при практическом применении может привести к результатам, не представляющим интерес. Например, если в формуле (23.22) $D(X) = 2\varepsilon^2$, то ее правая часть (23.22) будет равна -1 , а в левой части стоит вероятность, которая неотрицательна, т. е. неравенство в данном случае ничего нового не дает.

§ 23.9. Теорема Чебышёва

Теорема 23.2 (Чебышёва). Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, дисперсии которых не превышают некоторого положительного числа C , то, каким бы малым ни было положительное число ε , выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (23.27)$$

Доказательство. Рассмотрим новую случайную величину $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$, которая представляет собой среднеарифметическое исходных случайных величин. Запишем математическое ожидание этой величины. Учтем, что за знак математического ожидания можем вынести $1/n$, тогда $M(\bar{X}) = (1/n)M(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Но, как мы знаем, математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, поэтому $M(\bar{X}) = (M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n))/n$. Аналогично запишем дисперсию $\bar{X}$, учитывая, что при вынесении за знак дисперсии множителя $1/n$ он возводится в квадрат:

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2}. \quad (23.28)$$

По условию теоремы $D(X_1) \leq C$, $D(X_2) \leq C$, ..., $D(X_n) \leq C$. Сложив все эти неравенства, получим $D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) \leq nC$. Отсюда с учетом (23.28) получим

$$D(\bar{X}) \leq \frac{C}{n}. \quad (23.29)$$

Это неравенство умножим на отрицательное число $-\varepsilon^{-2}$, после этого к обеим частям прибавим по единице, получим

$$1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}. \quad (23.30)$$

Для введенной величины $\bar{X}$ запишем неравенство Чебышёва (23.22):

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}.$$

Воспользовавшись (23.30), получим $P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - C/(\varepsilon^2 n)$. Но вероятность в левой части этого неравенства, как и любая вероятность вообще, не больше единицы, поэтому $1 \geq P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - C/(\varepsilon^2 n)$. В последнем соотношении перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, учтя, что предел левой части равен единице. Предел правой части тоже равен единице. Таким образом, вероятность в записанном неравенстве заключена между величинами, имеющими при $n \rightarrow \infty$ один и тот же предел, равный единице. Поэтому согласно теореме 4.13 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) = 1$. Подставив сюда выражения для $\bar{X}$ и $M(\bar{X})$, получим требуемое равенство (23.27).

Из теоремы Чебышёва следует, что при больших значениях n значение случайной величины $\bar{X}$ — среднеарифметического исходных случайных величин — будет, как правило, мало отличаться от $M(\bar{X})$ — определенного числа, которое вычисляется и представляет собой среднеарифметическое математических ожиданий исходных величин. Иначе говоря, эта случайная величина перестает носить случайный характер.

Теорема Чебышёва имеет большое практическое значение. Она лежит в основе известного в статистике так называемого выборочного метода, когда о всей совокупности объектов судят по небольшой его части. Например, о качестве всей массы зерна судят по небольшой его пробе, составленной из зерен, взятых из различных мест массы зерна. Хотя проба зерна по массе небольшая, но она содержит большое число зерен. Согласно теореме Чебышёва при большом n можно о всей массе зерна судить по качеству взятой пробы.

Замечание. Если для любого малого числа $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение (23.27), то говорят, что случайная величина $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ сходится по вероятности к числу $\frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}$.

Это не означает, что содержащееся в формуле (23.27) неравенство всегда для всех значений $X_1, X_2, \dots, X_n$ будет выполняться, если n — достаточно большое число. При достаточно большом n вероятность

указанного неравенства будет близка к единице, поэтому указанное неравенство, как правило, будет выполняться, но могут быть и исключения.

§ 23.10. Теорема Бернулли, центральная предельная теорема Ляпунова

Теорема 23.3 (Бернулли). Пусть проводится n одинаковых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A или нет, причем вероятность появления события A во всех испытаниях одинакова и равна p — известному числу. Пусть m — число появлений события A , а m/n — относительная частота появлений события A при n проведенных одинаковых испытаниях. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

каким бы малым положительное число ε ни было.

Доказательство. Пусть X_1 — число появлений события A при первом испытании, X_2 — число появлений события A при втором испытании, ..., X_n — число появлений события A при n -м испытании. Случайная величина X_1 принимает значения: $x_{1,1} = 1$, если при первом же испытании событие A происходит (вероятность этого значения равна p); $x_{1,2} = 0$, если в первом испытании событие A не происходит (вероятность этого значения равна $q = 1 - p$). Поэтому математическое ожидание $M(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, дисперсия $D(X_1) = pq$. Аналогично для всех остальных случайных величин $X_2, \dots, X_n$ имеем $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = p$, $D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = pq$. Для рассматриваемых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ выполняются все условия теоремы Чебышёва, причем

$$M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = np. \quad (23.31)$$

Если при первом испытании событие A произойдет, X_1 примет значение 1, а если событие A не произойдет при первом испытании, то X_1 примет значение 0. Аналогично ведут себя и $X_2, \dots, X_n$. Поэтому если при n испытаниях событие A произойдет m раз, то m величин из набора $X_1, X_2, \dots, X_n$ примут значение единица, а остальные будут равны нулю. Это означает, что сумма $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ примет значение, равное m . Подставим m вместо указанной суммы в (23.27), учтем в ней соотношение (23.31) и получим требуемое.

Теорема 23.4 (центральная предельная теорема Ляпунова). Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же закону распределения с математическим ожи-

данием m и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении числа n случайных величин закон распределения нормированной суммы $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ будет сколь угодно близок к нормальному.

Теорема принимается без доказательства.

Практическое значение этой теоремы поясним на примере. Пусть рассматривается некоторая случайная величина, зависящая от множества факторов, каждый из них дает свою составляющую рассматриваемой случайной величины. Согласно теореме Ляпунова, если все эти составляющие имеют один и тот же закон распределения, то рассматриваемая случайная величина будет иметь закон распределения, мало отличающийся от нормального, если число упомянутых составляющих достаточно велико. Таким образом, эта теорема объясняет, почему на практике нормальное распределение встречается очень часто.

Теоремы Чебышёва, Бернулли и Ляпунова носят название *закона больших чисел*.

§ 23.11. Двумерная случайная величина

Пусть X — дискретная случайная величина, возможные значения которой суть $x_1, x_2, \dots, x_n$, а Y — другая дискретная случайная величина, возможные значения которой образуют последовательность $y_1, y_2, \dots, y_m$. Пусть эти две случайные величины таковы, что их значения при каждом испытании могут появиться только в виде пары (x_i, y_j) , причем заранее не известно, какая пара появится, однако для любых $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ известна вероятность $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ того, что появится пара (x_i, y_j) . Такая случайная величина называется *двумерной дискретной случайной величиной*. Она обозначается (X, Y) . Каждая из величин X и Y называется *составляющей*. Их называют также *одномерными случайными величинами*. Закон распределения (X, Y) задается следующей таблицей с двумя входами: в первой строке указываются значения Y , в первом столбце — значения X , а на пересечении строк и столбцов записываются соответствующие вероятности.

Таблица 23.10

	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

Поступая, как в случае одномерной дискретной случайной величины, можно показать, что сумма всех вероятностей этой таблицы $p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \dots + p(x_n, y_{m-1}) + p(x_n, y_m) = 1$.

Последнее соотношение, используя символы суммы, можно записать так:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = 1.$$

Пусть теперь X и Y — непрерывные случайные величины, причем x есть возможное значение X , а y — возможное значение Y . Пусть эти непрерывные случайные величины таковы, что их значения при каждом испытании могут появиться только в виде пары (x, y) , причем заранее неизвестно, какая пара появится. В этом случае говорят, что определена *двумерная непрерывная случайная величина*, ее обозначают (X, Y) .

Уточним это определение. Мы знаем, что каждой паре чисел (X, Y) на плоскости Oxy отвечает некоторая точка $M(x, y)$. Тогда всем возможным парам значений двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) на плоскости Oxy отвечает совокупность точек. Будем называть ее *совокупностью пар значений рассматриваемой случайной величины*. Как правило, будем рассматривать двумерные непрерывные случайные величины, для которых множество всех возможных пар значений образует на плоскости некоторую ее часть, т. е. область D , ограниченную некоторой замкнутой линией L . Вероятность попадания пары значений двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) в область D обозначим так: $P((X, Y) \subset D)$ (рис. 23.7).

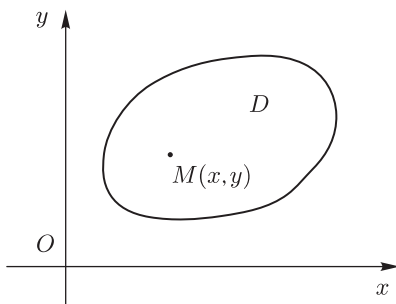


Рис. 23.7

§ 23.12. Функция распределения двумерной непрерывной случайной величины

Пусть D_{xy} — бесконечный квадрант в плоскости Oxy с вершиной в точке (x, y) , расположенный ниже и левее этой точки (на рис. 23.8 он заштрихован). Событие, состоящее в попадании пары (X, Y) значений непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) в квадрант D_{xy} , будем коротко называть событием $(X, Y) \subset D_{xy}$, или $(X < x, Y < y)$, или событием $(-\infty < X < x, -\infty < Y < y)$. *Функцией распределения*

рассматриваемой величины (X, Y) называется вероятность события $(X < x, Y < y)$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (23.32)$$

При фиксированном y , поступая, как и в случае одномерной случайной величины, для $x_1 < x_2$ нетрудно показать, что

$$P(X < x_2, Y < y) = P(X < x_1, Y < y) + P(x_1 \leq X < x_2, Y < y).$$

Отсюда с учетом (23.32) получим $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, т.е. $F(x, y)$ — неубывающая функция от x . Аналогично установим, что при фиксированном x функция $F(x, y)$ является неубывающей функцией от y .

Событие $(X < -\infty, Y < y)$ — невозможное событие, поэтому $P(X < -\infty, Y < y) = 0$. Тогда, перейдя к пределам при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ в соотношении (23.32), будем иметь соответственно

$$F(-\infty, y) = 0 \quad (23.33)$$

и

$$F(x, -\infty) = 0. \quad (23.34)$$

Событие $(X < +\infty, Y < +\infty)$ — достоверное событие, его вероятность равна единице, поэтому в силу (23.32), положив $x \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow +\infty$, имеем

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

§ 23.13. Плотность распределения вероятностей двумерной непрерывной случайной величины, ее связь с функцией распределения

Здесь под двумерной непрерывной случайной величиной (X, Y) будем понимать величину, функция распределения $F(x, y)$ которой непрерывна, дифференцируема по каждому из своих аргументов и имеет непрерывную вторую смешанную производную $\partial^2 F(x, y) / \partial x \partial y$.

Обозначим

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ называется *плотностью распределения вероятностей* рассматриваемой величины (X, Y) .

Поясним этот термин.

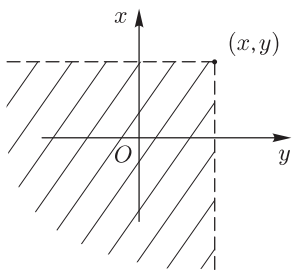


Рис. 23.8

В последнем соотношении положим $x = \text{const}$ и проинтегрируем его по y в интервале (η, y) :

$$\int_{\eta}^y \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dy = \int_{\eta}^y f(x, y) dy.$$

Но при $x = \text{const}$ производная

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right)$$

есть функция одного аргумента y , первообразная которой равна $\partial F(x, y)/\partial x$. Поэтому предыдущее соотношение, принимая во внимание, что интеграл в левой части может быть выражен по формуле Ньютона–Лейбница, запишем в форме

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial x} = \int_{\eta}^y f(x, y) dy.$$

Здесь перейдем к пределу при $\eta \rightarrow -\infty$ и учтем, что $\frac{\partial F(x, -\infty)}{\partial x} = 0$ в силу (23.34). Получим

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^y f(x, y) dy.$$

Положив в этом соотношении $y = \text{const}$ и проинтегрировав по x , аналогично предыдущему с учетом (23.33) будем иметь

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^y f(x, y) dy.$$

Получили формулу, связывающую функцию распределения и плотность распределения. Двукратный интеграл ее правой части равен двойному, поэтому

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (23.35)$$

Отсюда в силу (23.32) имеем

$$P[(x, y) \in D_{xy}] = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy. \quad (23.36)$$

Запишем последнюю формулу для бесконечного квадранта $D_{\beta\delta}$ с вершиной в точке (β, δ) , состоящего из областей D , D_1 , $D_{\alpha\delta}$

(рис. 23.9), где $D_{\alpha\delta}$ — квадрант с вершиной (α, δ) , D_1 — бесконечная полуполоса с вершинами (α, γ) и (β, γ) , лежащая ниже этих вершин:

$$P[(X, Y) \subset D_{\beta\delta}] = \iint_{D_{\beta\delta}} f(x, y) dx dy.$$

Ясно, что вероятность в левой части этой формулы равна сумме вероятностей событий $(X, Y) \subset D_{\alpha\delta}$, $(X, Y) \subset D + D_1$, где $D + D_1$ обозначает область, состоящую из D и D_1 . Следовательно, последнюю формулу

можно записать в виде

$$\begin{aligned} P[(x, y) \subset D_{\alpha\delta}] + P[(x, y) \subset D + D_1] &= \\ &= \iint_{D_{\alpha\delta}} f(x, y) dx dy + \iint_{D + D_1} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (23.36) получим

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \subset D + D_1] &= \\ &= \iint_{D + D_1} f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (23.37)$$

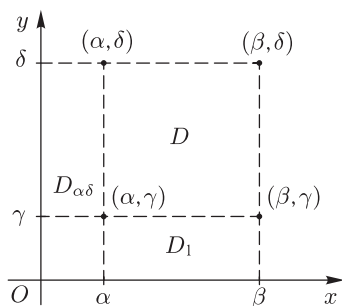


Рис. 23.9

Аналогично для области D_1 имеем

$$P[(X, Y) \subset D_1] = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy. \quad (23.38)$$

Формулу (23.37) запишем так:

$$P[(X, Y) \subset D] + P[(X, Y) \subset D_1] = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{D_1} f(x, y) dx dy.$$

Таким образом, согласно (23.38) будем иметь

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (23.39)$$

или

$$P(\alpha < X < \beta, \gamma < Y < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dx dy. \quad (23.40)$$

Запишем эту формулу для случая, когда $\alpha = x$, $\gamma = y$, $\beta = x + \Delta x$, $\delta = y + \Delta y$, где (x, y) — произвольная точка плоскости Oxy :

$$P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} f(x, y) dx dy.$$

Согласно свойству 5 (§ 13.6) двойной интеграл в этой формуле можно представить в виде произведения значения подынтегральной функции в некоторой точке $M(\xi, \eta)$ области интегрирования и площади этой области, т. е. в виде $f(\xi, \eta)\Delta x\Delta y$, поэтому

$$P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = f(\xi, \eta)\Delta x\Delta y.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x\Delta y} = \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \eta \rightarrow y}} f(\xi, \eta).$$

Так как $f(x, y)$ — непрерывная функция, то $\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \eta \rightarrow y}} f(\xi, \eta) = f(x, y)$, или

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x\Delta y} = f(x, y).$$

Здесь справа стоит плотность распределения вероятностей. Ясно, что предел в левой части последней формулы не может быть отрицательным; следовательно, $f(x, y) \geq 0$.

В (23.35) перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$ и учтем, что $F(+\infty, +\infty) = 1$. Тогда будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Получили соотношение, которому должна удовлетворять функция $f(x, y)$.

Формула (23.39) позволяет вычислить вероятность попадания значений величины (X, Y) в заданную область D , когда известна ее плотность распределения вероятностей $f(x, y)$. Эта формула остается в силе и для области произвольной формы. В сказанном легко убедиться, проведя рассуждения, аналогичные использованным при определении массы тела по заданному распределению плотности вещества по телу (см. 13.5).

§ 23.14. Законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины

Пусть (X, Y) — дискретная случайная величина, $p(x_i, y_j)$ — вероятности появления пар (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда событие $X = x_i$ означает или появление пары (x_i, y_1) , или появление пары (x_i, y_2) , ..., или появление пары (x_i, y_m) , т. е. появление суммы перечисленных m несовместных событий, поэтому вероятность

$P(X = x_i)$ равна сумме вероятностей указанных m событий. Обозначая $P(X = x_i) = p(x_i)$, запишем

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично найдем

$$P(Y = y_j) = p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

По этим формулам определяются законы распределения составляющих X и Y , когда известен закон распределения (X, Y) .

Пусть теперь (X, Y) — непрерывная случайная величина, $f(x, y)$ и $F(x, y)$ — соответственно плотность и функция распределения вероятностей этой величины. Тогда согласно (23.35) имеем

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

(здесь переменные интегрирования обозначены u, v , чтобы не путать их с переменными верхними пределами соответственно последнего интеграла). Пусть известна плотность распределения вероятностей $F(x, y)$ величины (X, Y) , тогда ее функция распределения $F(x, y)$ определяется по последней формуле. Найдем плотность и функцию распределения каждой из составляющих величины (X, Y) .

Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения составляющей X , тогда плотность распределения этой составляющей равна

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Событие $Y < +\infty$ есть достоверное событие, поэтому произведение событий $X < x$ и $Y < +\infty$ совпадает с событием $X < x$, следовательно, их вероятности равны: $P(X < x, Y < +\infty) = P(X < x)$. Но здесь левая часть равна $F(x, +\infty)$ согласно (23.32), а правая часть равна $F_1(x)$ в силу (23.9). Тогда

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv.$$

Продифференцировав это соотношение по x , найдем

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv.$$

Совершенно аналогично определяются функция $F_2(y)$ и плотность $f_2(y)$ распределения составляющей Y :

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du.$$

§ 23.15. Условные законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины

Если события A и B зависимы, то согласно (22.8) условная вероятность события A при условии B равна

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Использував эту формулу, рассмотрим условные законы распределения составляющих дискретной случайной величины (X, Y) в случае, когда составляющие зависимы. Пусть закон распределения этой величины известен, т. е. известны вероятности $p(x_i, y_j)$ для всех пар (x_i, y_j) возможных значений X и Y , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть событие $Y = y_j$ произошло. Тогда при этом условии можно найти условную вероятность события $X = x_i$. Обозначим ее $p(x_i|y_j)$. В приведенной выше формуле мы должны взять

$$P(A|B) = p(x_i|y_j), \quad P(B) = p(y_j), \quad P(AB) = p(x_i, y_j),$$

Поэтому

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j)$, эта формула справедлива для каждого значения y_j , $j = 1, 2, \dots, m$.

Аналогично найдем условную вероятность составляющей Y при условии $X = x_i$:

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j)$, для каждого значения x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{i=1}^n p(x_i|y_j) = 1, \quad \sum_{j=1}^m p(y_j|x_i) = 1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда (X, Y) — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x, y)$. Условной плотностью $f_1(x|y)$ рас-

предельная составляющей X при данном значении $Y = y$ называется функция, определяемая формулой

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)},$$

где $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$.

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y при данном значении $X = x$:

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)},$$

где $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$. Условные плотности распределения удовлетворяют равенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x|y) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y|x) dy = 1.$$

§ 23.16. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Аналогично тому, как это было сделано в случае одномерной случайной величины (§§ 23.6, 23.7), введем понятие математического ожидания и дисперсии в случае двумерной случайной величины.

Математическими ожиданиями $M(X)$ и $M(Y)$ составляющих соответственно X и Y , дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ составляющих соответственно X и Y называются числа, определяемые формулами

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i),$$

$$M(Y) = m_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j),$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^2 p(x_i, y_j), \quad D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - m_y)^2 p(x_i, y_j),$$

где $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, в случае, когда случайная величина (X, Y) дискретная, и формулами

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 M(Y) = m_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy, \\
 D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy, \\
 D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy,
 \end{aligned}$$

если (X, Y) — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x, y)$.

Числа $M(X)$, $M(Y)$ являются координатами *центра распределения* пар возможных значений величины (X, Y) , а дисперсии $D(X)$, $D(Y)$ характеризуют рассеивание (разброс) случайной точки (X, Y) в направлении осей Ox , Oy соответственно.

Корреляционным моментом случайной величины (X, Y) называется число, обозначаемое K_{xy} и определяемое формулой

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p(x_i, y_j)$$

для дискретной случайной величины и формулой

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy$$

в случае непрерывной случайной величины (X, Y) с плотностью распределения $f(x, y)$.

Корреляционный момент характеризует рассеивание случайной точки (X, Y) относительно точки (m_x, m_y) . В дальнейшем будет показано, что если составляющие X , Y независимы, то корреляционный момент равен нулю, а если корреляционный момент не равен нулю, то X и Y — зависимые случайные величины. Следовательно, корреляционный момент является также характеристикой связи между X и Y .

§ 23.17. Условные математические ожидания

В случае, когда составляющие двумерной случайной величины (X, Y) зависимы, т.е. закон распределения любой из них зависит от того, какое значение приняла другая, возникает необходимость в рассмотрении наряду с числовыми характеристиками, введенными в §23.16, числовых характеристик условных распределений вероятностей этих составляющих.

Условным математическим ожиданием любой из составляющих случайной величины (X, Y) называется ее математическое ожидание, вычисленное при условии, что другая составляющая приняла данное значение. Оно обозначается $M(X|y)$ для составляющей X при данном значении $Y = y$ и $M(Y|x)$ для составляющей Y при данном значении $X = x$.

Заменяя в формулах § 23.16 вероятности $p(x_i)$, $p(y_j)$ на соответствующие условные вероятности $p(x_i|y_j)$, $p(y_j|x_i)$, в случае дискретной случайной величины (X, Y) будем иметь

$$M(X|y_j) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i|y_j), \quad M(Y|x_i) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j|x_i).$$

Аналогично, заменив $f_1(x)$, $f_2(y)$ на соответствующую условную плотность в случае непрерывной случайной величины (X, Y) , по формулам § 23.16 получим

$$M(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x|y) dx, \quad M(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y|x) dy.$$

Ясно, что $M(Y|x)$ есть функция от x , обозначим ее $M(Y|x) = \varphi(x)$ и назовем *функцией регрессии Y на X* , а функцию $M(X|y) = \psi(y)$ — *функцией регрессии X на Y* . Если обе функции регрессии $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ линейны, то говорят, что случайные величины X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью*. Графики функций регрессии $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ на плоскости Oxy называются *кривыми регрессии*.

Ясно, что в случае дискретной случайной величины (X, Y) мы получим множество точек $(x_i, M(Y|x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, ломаную с вершинами в этих точках, а также точки $(M(X|y_j), y_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, и соответствующую им ломаную.

§ 23.18. Зависимость и независимость случайных величин

Согласно определениям в §§ 23.6, 23.7, две случайные величины называются независимыми, если закон распределения вероятностей любой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Это означает, что закон распределения этой величины совпадает с ее условным законом распределения.

Остановимся на условии независимости двух непрерывных случайных величин.

Теорема 23.5. Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Доказательство. Необходимость. Дано, что величины X и Y независимы. Поэтому события $X < x$ и $Y < y$ независимы, поскольку функция распределения $F_1(x)$ величины X , а, следовательно, вероятность $P(X < x) = F_1(x)$ не зависит от того, какое значение приняла величина Y , и вероятность $P(Y < y) = F_2(y)$ не зависит от того, какое значение приняла X . Но вероятность $P(X < x, Y < y)$ произведения независимых событий $X < x$, $Y < y$ равна $P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$. Замечая, что здесь левая часть равна $F(x, y)$, получим нужное равенство.

Достаточность. Дано, что $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$. Поэтому выполняется равенство $P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$. Отсюда следует, что события $X < x$ и $Y < y$ независимы (если бы они были зависимы, правая часть последней формулы содержала бы условную вероятность), поэтому и величины X и Y независимы.

Условие теоремы можно заменить условием, связывающим соответствующие плотности распределения $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Это соотношение равносильно условию теоремы. В самом деле, продифференцировав $F(x, y)$ по y , а затем по x и замечая, что $F''_{xy} = f(x, y)$, $F'_1(x) = f_1(x)$, $F'_2(y) = f_2(y)$, придем к последнему равенству, и наоборот, заменив в последнем x, y соответственно на u, v и проинтегрировав равенство по интервалу $-\infty < v < y$, затем по интервалу $-\infty < u < x$, с учетом формул § 23.14 получим утверждение теоремы.

Ясно, что условие независимости составляющих X и Y двумерной дискретной случайной величины в обозначениях § 23.14 записывается так:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Учитывая последнее соотношение и условие $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ в случае непрерывных случайных величин, на основании формул § 23.16 легко прийти к заключению, что если случайные величины X и Y независимы, то корреляционный момент двумерной случайной величины (X, Y) равен нулю: $K_{xy} = 0$. В случае, когда $K_{xy} \neq 0$, случайные величины X и Y называются *коррелированными*. Ясно, что такие величины зависимы (поскольку в случае их независимости $K_{xy} = 0$). Если $K_{xy} = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. На примерах можно показать, что такие величины

могут оказаться зависимыми, т.е. из условия $K_{xy} = 0$ не следует независимость этих величин.

Как уже отмечалось (§ 23.16), корреляционный момент K_{xy} характеризует зависимость между величинами X и Y . Но нетрудно проверить, что K_{xy} является размерной величиной, его размерность равна произведению размерностей величин X и Y , поэтому значение K_{xy} зависит от выбора размерностей величин X и Y . По этой причине для характеристики степени зависимости между величинами X и Y предпочтительнее использовать безразмерную величину

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

называемую *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y .

Без обоснования отметим, что коэффициент корреляции удовлетворяет соотношению $-1 \leq r_{xy} \leq 1$, и если случайные величины X и Y связаны функциональной линейной зависимостью $Y = aX + b$, где a, b — постоянные, т.е. значению $X = x$ отвечает $Y = y = ax + b$, то $r_{xy} = 1$ при $a > 0$, $r_{xy} = -1$ при $a < 0$. Отметим, что в теории вероятностей чаще встречается не функциональная зависимость между случайными величинами X и Y , а вероятностная зависимость, когда по значению $X = x$ не может определяться соответствующее значение $Y = y$, а находится лишь соответствующий закон распределения Y — условный закон распределения Y при условии $X = x$ (§ 23.15). Коэффициент корреляции характеризует степень близости вероятностной зависимости к линейной. В частности, если он положителен, то при возрастании X величина Y имеет тенденцию в среднем возрастать. Условие $r_{xy} = 0$ означает отсутствие линейной связи между величинами X и Y , но может существовать другая связь.

Пример. Случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Требуется выяснить, зависимы или нет составляющие X и Y . По формулам § 23.14 имеем

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\pi(1+v^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

аналогично

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Следовательно, $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, величины X и Y независимы.

§ 23.19. Нормальный закон распределения на плоскости

Закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется нормальным, если ее плотность распределения вероятностей определяется формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x-a}{\sigma_x}\frac{y-b}{\sigma_y}\right]\right).$$

Здесь все величины в правой части, кроме x, y , — известные числа, которые заранее заданы. В частности,

- σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения;
- r_{xy} — коэффициент корреляции, характеризующий связь между составляющими (X, Y) двумерной случайной величины;
- точка (a, b) — центр распределения вероятностей рассматриваемой двумерной случайной величины.

Рассмотрим частный случай этого нормального закона, когда коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$. Тогда предыдущая формула может быть записана в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma_x^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-(y-b)^2/(2\sigma_y^2)}. \quad (23.41)$$

Функция $f(x, y)$ принимает наибольшее значение в точке (a, b) и стремится к нулю, когда $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Вычислим теперь вероятность попадания непрерывной двумерной случайной величины с нормальным законом распределения в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат на плоскости Oxy (рис. 23.9). В формулу (23.40) вместо $f(x, y)$ подставим функцию (23.41) и выразим двойной интеграл формулы через двукратный. Получим

$$P(\alpha < X < \beta, \gamma < Y < \delta) = \\ = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \int_{\gamma}^{\delta} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}\right) dy.$$

Используя (23.11) и (23.16), получим

$$P(\alpha < X < \beta, \gamma < Y < \delta) = \\ = \left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{\delta-b}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma-b}{\sigma_y}\right)\right].$$

Замечание. Можно показать, что рассматриваемая здесь плотность распределения $f(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

По указанной плотности $f(x, y)$, определив на основании формул § 23.15 условные плотности $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$, найдем $M(X|y) = \psi(y)$, $M(Y|x) = \varphi(x)$ — функции регрессии (§ 23.17), и убедимся в том, что обе они линейны.

Следовательно, справедлива

Теорема 23.6. *Если двумерная случайная величина (X, Y) имеет нормальный закон распределения, то составляющие X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Отметим, что утверждение теоремы остается в силе и в том случае, когда составляющие X , Y независимы и коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$. Следовательно, линейная корреляционная зависимость отличается от зависимости, рассмотренной в § 23.18.

§ 23.20. Об аксиоматическом подходе в теории вероятностей

Наиболее строгое изложение теории вероятностей достигается при использовании аксиоматического подхода.

Пусть производится испытание (эксперимент) со случайным исходом (событием). Множество Ω всех взаимоисключающих исходов испытания называется *пространством элементарных событий* — *исходов*; элементарные события называются *элементами множества Ω* . Множество, состоящее из элементов некоторой части Ω , называется *подмножеством множества Ω* .

Например, если испытание — бросание игральной кости, то Ω есть множество событий $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, означающих появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно. Если испытание — бросание точки в интервал (a, b) оси Ox , то Ω — бесконечное множество элементарных событий, каждое из которых представляет собой попадание точки в некоторый интервал, принадлежащий (a, b) .

Событием называется любое подмножество A элементов из Ω , если Ω — множество, состоящее из конечного числа элементов, или счетное множество, элементы которого можно пронумеровать целыми числами $n = 1, 2, \dots$. В случае произвольного Ω событиями называются только подмножества из некоторого класса F подмножеств Ω , называемого алгеброй событий (см. ниже). Говорят, что событие A произошло, если произошло какое-либо из событий — элементов множества A .

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из событий A и B .

Произведением AB называется событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих обоим событиям A и B .

Разность событий A и B есть множество $A - B$, состоящее из элементов A , не принадлежащих B .

Множество Ω называется *достоверным событием*; пустое множество, т. е. множество $\emptyset$, не содержащее ни одного элемента, называется *невозможным событием*; $\bar{A} = \Omega - A$ называется *событием, противоположным (дополнительным к) A* . События A и B *несовместны*, если $AB = \emptyset$.

Класс подмножеств F множества Ω называется *алгеброй событий*, если Ω , а также AB , $A + B$, $A - B$ при любых A, B из F принадлежат классу подмножеств F .

Каждому событию A ставят в соответствие определенное число $P(A)$, называемое *вероятностью события* A , и требуют, чтобы вероятность удовлетворяла следующим аксиомам.

1. Вероятность любого события A неотрицательна: $P(A) \geq 0$.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.
3. Если A и B — несовместные события, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

4. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$, — попарно несовместные события, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Эти аксиомы позволяют вычислить вероятность любых событий, если известны вероятности элементарных событий (при условии, что последние можно перенумеровать). Вопрос о том, как находятся вероятности элементарных событий, не рассматривается. В каждой конкретной ситуации (задаче) они вычисляются своим методом. Например, если Ω — пространство элементарных событий, появляющихся при бросании игральной кости, то $\Omega = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$,

$$P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^6 A_i\right) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) = 1.$$

Но события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ равновозможны, следовательно,

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = \frac{1}{6}.$$

На основе указанных аксиом изучают свойства вероятностей и доказывают теоремы о соотношениях, связывающих эти вероятности.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В результате наблюдений массовых случайных событий и регистрации случайных величин получаются статистические данные, к которым относятся, в частности, и результаты измерений тех или иных значений случайных величин, всегда содержащие случайные ошибки. Одной из задач математической статистики является определение приближенных законов распределения рассматриваемых случайных величин и оценка параметров законов распределения этих случайных величин на основе статистических данных, т. е. на основе наблюдений, испытаний.

Любое статистическое обследование начинается с наблюдения (измерения) выборки — части объектов исследуемой совокупности, так как сплошное обследование требует больших материальных и временных затрат. Чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить обо всей совокупности, необходимо, чтобы данные выборки правильно ее представляли. Этого можно достигнуть, организовав эксперимент так, чтобы вероятность выбора была одинакова для всех элементов совокупности. Выборку в таком случае называют *представительной*.

§ 24.1. Простой статистический ряд. Статистическая функция распределения. Статистический ряд. Гистограмма

Пусть X — непрерывная случайная величина, закон распределения которой нужно найти. Например, нужно найти ее функцию распределения $F(x)$. С этой целью проводят серию испытаний, измерений, причем в каждом из них появляется и замеряется значение X . Результаты этих испытаний оформляются в виде таблицы, в первой строке которой записывается номер испытания (измерения), а во второй строке — значение x_i измеренной величины X в i -м испытании (табл. 24.1).

Эту таблицу называют *простым статистическим рядом*, или *выборкой*. Множество всех возможных значений X назовем *генеральной совокупностью*.

Таблица 24.1

№ испытания	1	2	...	i	...	n
Значения X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n

Будем считать для простоты, что в этой таблице все измеренные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ различные. Здесь при обработке данных будем различать два случая и соответственно им будем проводить анализ табл. 24.1.

Случай 1. Число n измерений в табл. 24.1, т.е. число измеренных значений X , не очень велико, например, от 10 до 20. В этом случае на основании табл. 24.1 строят так называемую *статистическую (выборочную) функцию распределения*, обозначаемую $F^*(X)$ и равную $P^*(X < x)$ — относительной частоте появления события $X < x$, т.е. числу появлений этого события, деленному на число n проведенных измерений (появление события $X < x$ означает, что рассматриваемая величина приняла значение, меньшее x):

$$F^*(x) = P^*(X < x) \quad (24.1)$$

для любого фиксированного x .

Для того чтобы построить функцию $F^*(x)$, поступим следующим образом: из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ табл. 24.1 выберем наименьшее и обозначим его $\bar{x}_1$, далее из оставшихся $(n - 1)$ чисел табл. 24.1 снова выберем наименьшее и обозначим его $\bar{x}_2$. Продолжив процесс, расположим числа табл. 24.1, стоящие во второй строке, в виде последовательности возрастающих чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

Далее поступим так. При $x \leq \bar{x}_1$ в табл. 24.1 нет значений, меньших x , поэтому $P^*(X < x) = 0$. При $\bar{x}_1 < x \leq \bar{x}_2$ в табл. 24.1 имеется лишь одно значение x_1 , меньшее x , поэтому $P^*(X < x) = 1/n$. При $\bar{x}_2 < x \leq \bar{x}_3$ в табл. 24.1 имеются два значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, меньшие x , следовательно, $P^*(X < x) = 2/n$, и т.д.: для интервала $\bar{x}_i < x \leq \bar{x}_{i+1}$ будем иметь $P^*(X < x) = i/n$. При $x < \bar{x}_n$ все значения табл. 24.1 меньше x , поэтому $P^*(X < x) = n/n = 1$.

Теперь с учетом (24.1) можно записать:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \bar{x}_1, \\ 1/n & \text{при } \bar{x}_1 < x \leq \bar{x}_2, \\ 2/n & \text{при } \bar{x}_2 < x \leq \bar{x}_3, \\ \dots & \dots \\ i/n & \text{при } \bar{x}_i < x \leq \bar{x}_{i+1}, \\ \dots & \dots \\ 1 & \text{при } \bar{x}_n < x. \end{cases} \quad (24.2)$$

График функции $F^*(x)$ на плоскости Oxy имеет вид, показанный на рис. 24.1. Как показывает формула (2), график этой функции $F^*(x)$ представляет собой прерывистую линию, состоящую из прямолинейных участков, лежащих на прямых параллельных оси Ox и отстоящих друг от друга на $1/n$.

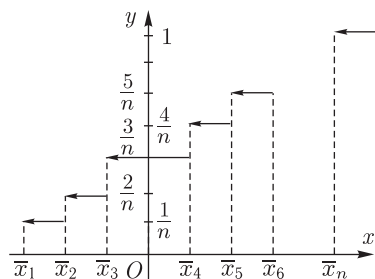


Рис. 24.1

Пусть $F(x)$ есть функция распределения рассматриваемой случайной величины X . Мы знаем, что $F(x) = P(-\infty < X < x)$ — вероятность попадания X в интервал $(-\infty, x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (24.3)$$

Покажем, что построенная статистическая функция распределения $F^*(x)$ может быть взята приблизительно в качестве функции распределения $F(x)$. Вначале рассмотрим, как изменяется график функции $F^*(x)$ с увеличением числа n измерений табл. 24.1. С увеличением n разрывы графика, равные $1/n$, уменьшаются. Кроме того, с увеличением n в интервалах $\bar{x}_i < x \leq \bar{x}_{i+1}$ появляются новые значения x , т.е. эти интервалы измельчаются; следовательно, длины конечных отрезков, составляющих график функции $F^*(x)$, также уменьшаются. Таким образом, график функций $F^*(x)$ стремится к сплошной линии.

Рассмотрим событие $X < x$. Для любого фиксированного x вероятность этого события обозначим $P(X < x) = p$. Относительную частоту этого события при n одинаковых испытаниях обозначим $P^*(X < x) = m/n$. Будем считать, что для события $X < x$ выполняются условия теоремы Бернулли о повторных испытаниях. Тогда согласно теореме Бернулли, каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность выполнения неравенства $|m/n - p| < \varepsilon$, т.е. неравенства $|P^*(X < x) - P(X < x)| < \varepsilon$, будет сколь угодно близка к единице, если число n испытаний будет достаточно велико, так как вероятность этого неравенства стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что относительная частота $P^*(X < x)$, как правило, будет мало отличаться от вероятности $P(X < x)$. Тогда согласно (24.1) и (24.3) $F^*(x)$ будет мало отличаться от $F(x)$ для любого фиксированного x .

Случай 2. Когда число измерений в табл. 24.1, а следовательно, число значений X во второй строке этой таблицы достаточно велико, например, несколько десятков или даже сотен, таблица становится труднообозримой и анализ ее затрудняется. В этом случае поступают иначе: весь интервал значений, внутри которого находятся значения X ,

разбивают на частичные интервалы $(a_1, a_2]$, $(a_2, a_3]$, ..., $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$. Число λ интервалов обычно берут от 10 до 20. Значения X табл. 24.1, совпадающие с числами $a_2, a_3, \dots, a_\lambda$, будем относить к левому интервалу. Подсчитаем число значений X , попавших в указанные частичные интервалы. Пусть m_1 — число значений X в табл. 24.1, попавших в интервал (a_1, a_2) , m_2 — число значений X , попавших в (a_2, a_3) , ..., m_λ — число значений X , попавших в интервал $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$. Очевидно,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_\lambda = n. \quad (24.4)$$

Пусть

$$m_k/n = p_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, \lambda. \quad (24.5)$$

Ясно, что p_k^* есть относительная частота попадания X в интервал (a_k, a_{k+1}) . В силу (24.5) имеем $p_1^* + p_2^* + \dots + p_\lambda^* = (m_1 + m_2 + \dots + m_\lambda)/n$. Отсюда с учетом (24.4)

$$p_1^* + p_2^* + \dots + p_\lambda^* = \sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* = 1. \quad (24.6)$$

Теперь от табл. 24.1 перейдем к другой таблице — табл. 24.2, в первой строке которой записаны частичные интервалы, во второй строке — значения m_k , $k = 1, 2, \dots, \lambda$. В последней строке стоят относительные частоты p_k^* для всех $k = 1, 2, \dots, \lambda$.

Таблица 24.2

Частичные интервалы	(a_1, a_2)	(a_2, a_3)	...	(a_k, a_{k+1})	...	$(a_\lambda, a_{\lambda+1})$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Эту таблицу называют *статистическим рядом* (группировкой).

Табл. 24.2 иллюстрируется геометрически. Для этого на оси Ox плоскости Oxy показывают частичные интервалы табл. 24.2 и на них как на основаниях строят прямоугольники с площадью p_k^* , высоты которых равны $h_k = p_k^*/(a_{k+1} - a_k)$. Это построение выполним для всех $k = 1, 2, \dots, \lambda$. Получим фигуру, составленную из прямоугольников, которая называется *гистограммой* (рис. 24.2). Ясно, что площадь гистограммы равна, согласно (24.5), $p_1^* + p_2^* + \dots + p_\lambda^* = 1$.

Иногда от табл. 24.2 переходят к табл. 24.3 следующим образом. Середину интервала (a_k, a_{k+1}) обозначают $\bar{x}_k = (a_{k+1} + a_k)/2$. Предполагая, что интервал (a_k, a_{k+1}) по длине мал, считают, что все m_k значений X , попавших в интервал (a_k, a_{k+1}) , мало отличаются друг от друга и приблизительно равны $\bar{x}_k$. Таким образом, величина X значе-

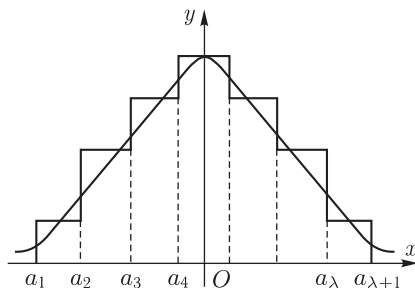


Рис. 24.2

ние $\bar{x}_k$ принимает m_k раз. Сказанное относится ко всем частичным интервалам табл. 24.2. Табл. 24.3 получают из табл. 24.2 заменой первой строки — частичных интервалов — на соответствующее значение $\bar{x}_k$, $k = 1, 2, \dots, \lambda$.

Таблица 24.3

Средины интервалов	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_k$	...	$\bar{x}_\lambda$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Пусть $f^*(x)$ есть функция, график которой состоит из верхних оснований прямоугольников гистограммы, т. е. $f^*(x) = h_k = \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k}$ при $a_k < x < a_{k+1}$ для любого $k = 1, 2, \dots, \lambda$. Кроме того, положим $f^*(x) = 0$ при $x < a_1$ и $x > a_{\lambda+1}$.

По только что построенной функции $f^*(x)$ найдем всюду на оси Ox функцию $F^*(x)$, для которой $F'^*(x) = f^*(x)$. Так как в интервале $a_k < x < a_{k+1}$ функция $f^*(x)$ непрерывна, можно применить в этом интервале формулу Ньютона — Лейбница с верхним пределом x :

$$\int_{a_k}^x f^*(t) dt = F^*(x) - F^*(a_k), \quad a_k < x \leq a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \lambda.$$

Но в интервале (a_k, a_{k+1}) функция $f^*(x)$ постоянна и равна h_k . Поэтому

$$\int_{a_k}^x h_k dt = \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k} (x - a_k).$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим

$$F^*(x) - F^*(a_k) = \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k} (x - a_k), \quad a_k < x \leq a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \lambda. \quad (24.7)$$

В (24.7) положим $x = a_{k+1}$, тогда

$$F^*(a_{k+1}) = F^*(a_k) + p_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, \lambda. \quad (24.8)$$

Примем $F^*(a_1) = 0$. Согласно (24.8) соответственно будем иметь

$$F^*(a_2) = p_1^*, \quad F^*(a_3) = p_1^* + p_2^*, \quad \dots, \quad F^*(a_{k+1}) = p_1^* + p_2^* + \dots + p_k^*, \\ F^*(a_{\lambda+1}) = p_1^* + p_2^* + \dots + p_\lambda^* = 1.$$

Для $x < a_1$, когда $f^*(x) = 0$, по формуле Ньютона–Лейбница получим

$$F^*(x) - F^*(a_1) = \int_{a_1}^x f^*(t) dt = 0.$$

Так как $F^*(a_1) = 0$, то $F^*(x) = 0$ для всех $x < a_1$. Аналогично получим, что $F^*(x) = 1$ для всех $x > a_{\lambda+1}$.

Как видно из предыдущего и, в частности, из (24.7), график функции $F^*(x)$ состоит из прямолинейных участков. В самом деле, в интервале $a_k < x < a_{k+1}$ рассматриваемая функция имеет уравнение $y = F^*(a_k) + p_k^*(x - a_k)/(a_{k+1} - a_k)$. Но последнее есть уравнение прямой. Записав формулу (24.7) для $k = 1, 2, \dots, \lambda$, убедимся в том, что начало последующего отрезка графика совпадает с концом предыдущего, и график функции $F^*(x)$ имеет вид, показанный на рис. 24.3.

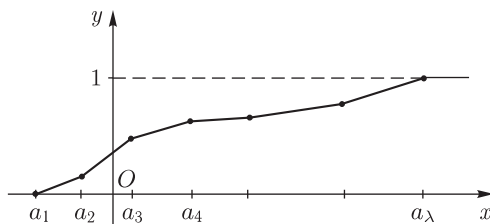


Рис. 24.3

Построенная функция $F^*(x)$ называется *статистической (эмпирической) функцией распределения* рассматриваемой непрерывной случайной величины X .

Пусть $f(x)$, $F(x)$ — соответственно искомые плотность и функция распределения изучаемой непрерывной случайной величины X . Покажем, что в качестве этих функций можно приближенно взять

только что построенные функции $f^*(x)$ и $F^*(x)$. В самом деле, по определению плотности распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

При малых Δx дробь под знаком предела будет мало отличаться от своего предела $f(x)$, т. е. $f(x) \approx P(x < X < x + \Delta x)/\Delta x$. Запишем это соотношение для интервала (a_k, a_{k+1}) , считая, что его длина мала, т. е. положим $x = a_k$, $x + \Delta x = a_{k+1}$. Тогда $\Delta x = a_{k+1} - a_k$, и предыдущая формула примет вид $f(a_k) \approx \frac{P(a_k < X < a_{k+1})}{a_{k+1} - a_k}$. В силу малости интервала (a_k, a_{k+1}) приближенно можно принять, что в этом интервале $f(x)$ изменяется мало и равна $f(a_k)$. Тогда запишем

$$f(x) \approx \frac{P(a_k < X < a_{k+1})}{a_{k+1} - a_k}, \quad a_k < x < a_{k+1}. \quad (24.9)$$

Но, как мы знаем, $P(a_k < X < a_{k+1})$ — вероятность попадания X в интервал (a_k, a_{k+1}) — мало отличается от p_k^* — относительной частоты попадания X в интервал при большом числе испытаний. Значит, числители дробей в правых частях формул $f^*(x) = \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k}$, $a_k < x < a_{k+1}$, и (24.9) приближенно равны, но их знаменатели одинаковы, следовательно, дроби приближенно равны: $f(x) \approx f^*(x)$, $a_k < x < a_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, \lambda$. Кроме того, учтем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Поэтому можно принять, что $f(x) \approx 0$ в интервалах $(a_{\lambda+1}, +\infty)$ и $(-\infty, a_1)$. Но в этих интервалах $f^*(x) = 0$. Таким образом, $f(x) \approx f^*(x)$ для всех x . Следовательно, $F(x) - F^*(x) \approx C = \text{const}$, так как эти функции имеют приближенно равные производные $F'(x) = f(x) \approx f^*(x) = F'^*(x)$. Однако $F^*(x) = 0$ при $x < a_1$, а $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; значит, в предыдущей формуле нужно взять $C = 0$. Отсюда $F(x) \approx F^*(x)$ для всех x .

§ 24.2. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание и дисперсия определяются следующими формулами (см. формулы (23.17) и (23.18)):

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (24.10)$$

Пусть X — непрерывная случайная величина, закон распределения который мы ищем, в частности, ищем ее математическое ожидание и дисперсию. С этой целью проведем n испытаний (измерений) и со-

ставим табл. 24.1 измеренных значений X . По этой экспериментально полученной таблице значений X , зная числа $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, вычислим следующие два числа:

$$\bar{m}_x = \overline{M}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (24.11)$$

$$\overline{D}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m}_x)^2. \quad (24.12)$$

Соотношения (24.11), (24.12) получаются из (24.10), если в (24.10) вероятности p_i значений x_i заменить на число $1/n$ — относительную частоту каждого из этих значений.

Число $\bar{m}_x$ называется *статистическим средним*, а $\overline{D}(X)$ — *статистической дисперсией величины X* . Вместе эти числа называются *точечными оценками математического ожидания $M(X) = m_x$ и дисперсии $D(X)$* рассматриваемой случайной величины.

Эти термины применяются в связи с тем, что при больших значениях n числа $\bar{m}_x$, $\overline{D}(X)$ соответственно можно приближенно принять за искомые математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины, поскольку при увеличении числа n величины $\bar{m}_x$, $\overline{D}(X)$ сходятся по вероятности к истинным математическому ожиданию m_x и дисперсии $D(X)$ соответственно (см. об этом § 24.4). При дополнительных достаточно общих предположениях возможность замены $\bar{m}_x$, $\overline{D}(X)$ соответственно на m_x , $D(X)$ для больших значений n можно обосновать также следующим образом.

От табл. 24.1 перейдем к табл. 24.2. Отметим, что при этом в интервал (a_k, a_{k+1}) табл. 24.2 попадет m_k значений X и относительная частота попаданий X в этот интервал будет равна $p_k^* = m_k/n$. В силу малости интервала (a_k, a_{k+1}) приближенно будем считать, что все m_k значений X , попавших в этот интервал, близки друг к другу и мало отличаются от середины интервала $\bar{x}_k = (a_k + a_{k+1})/2$. Приближенно считаем, что все значения X , попавшие в интервал (a_k, a_{k+1}) , равны между собой и равны $\bar{x}_k$ и это значение величина X принимает m_k раз (т. е. от табл. 24.2 переходим к табл. 24.3, считая, что $k = 1, 2, \dots, \lambda$). Поэтому в правой части (24.11) сумма значений X , попавших в интервал (a_k, a_{k+1}) , приближенно равна $m_k \bar{x}_k$ и указанную формулу теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{m}_x &= \frac{1}{n} (m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + \dots + m_\lambda \bar{x}_\lambda) = \\ &= \frac{m_1}{n} \bar{x}_1 + \frac{m_2}{n} \bar{x}_2 + \dots + \frac{m_\lambda}{n} \bar{x}_\lambda = p_1^* \bar{x}_1 + p_2^* \bar{x}_2 + \dots + p_\lambda^* \bar{x}_\lambda, \end{aligned}$$

или

$$\bar{m}_x = \sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* \bar{x}_k. \quad (24.13)$$

Рассуждая аналогично, запишем формулу (24.12) следующим образом:

$$\overline{D}(X) = \sum_{k=1}^{\lambda} (\bar{x}_k - \bar{m}_x)^2 p_k^*. \quad (24.14)$$

С другой стороны, математическое ожидание рассматриваемой непрерывной случайной величины определяется формулой

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (24.15)$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей. Несобственный интеграл в этой формуле запишем в виде суммы интегралов, взятых по интервалам $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , ..., $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$, $(a_{\lambda+1}, +\infty)$ (законность такого представления вытекает из соответствующего свойства определенных интегралов, согласно которому определенный интеграл можно представить как сумму определенных интегралов по частям интервала, на которые он разбит; при этом следует учесть, что несобственный интеграл есть предел определенного интеграла $\int_{\xi}^{\eta} x f(x) dx$, когда $\xi \rightarrow -\infty$, $\eta \rightarrow +\infty$ произвольным образом). Таким образом, формула (24.15) может быть записана так:

$$m_x = \int_{-\infty}^{a_1} x f(x) dx + \sum_{k=1}^{\lambda} \int_{a_k}^{a_{k+1}} x f(x) dx + \int_{a_{\lambda+1}}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (24.16)$$

Предположим, что $x f(x) \rightarrow 0$ настолько быстро при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$, что первый и последний интегралы в (24.16) приближенно равны нулю. Остается рассмотреть в этой формуле интегралы, взятые по интервалам табл. 24.2. В интервале (a_k, a_{k+1}) приближенно будем считать, что $x \approx \bar{x}_k$ — середине интервала. Кроме того, как уже отмечалось выше, в этом интервале справедливо приближенное равенство

$$f(x) \approx f^*(x) = \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k}.$$

Значит,

$$x f(x) \approx \bar{x}_k \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k}. \quad a_k < x < a_{k+1}.$$

Поэтому

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} x f(x) dx \approx \bar{x}_k \frac{p_k^*}{a_{k+1} - a_k} (a_{k+1} - a_k) = \bar{x}_k p_k^*$$

и (24.16) примет вид $m_x \approx \sum_{k=1}^{\lambda} \bar{x}_k p_k^*$. Сравнив полученное соотношение с (24.13), видим, что $\bar{m}_x \approx m_x$.

Аналогично можно показать, что истинная дисперсия $D(X) \approx \bar{D}(X)$ — числу, найденному по формуле (24.12).

Нередко в качестве оценки дисперсии вместо $\bar{D}(X)$ берут число $s^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m}_x)^2$, называемое *исправленной дисперсией* (ясно, что при больших значениях n эти числа близки).

§ 24.3. Интервальная оценка математического ожидания непрерывной случайной величины

Пусть X — изучаемая непрерывная случайная величина. Проведем n испытаний (измерений) и составим табл. 24.1. Зная числа этой таблицы, по формулам (24.11), (24.12) найдем статистическое среднее $\bar{m}_x$ и статистическую дисперсию $\bar{D}(X)$. Нужно оценить, насколько найденное число $\bar{m}_x$ отличается от истинного математического ожидания $M(X) = m_x$.

Пусть β — заданное положительное число, близкое к единице и меньшее ее. Обычно берут $\beta = 0,997$ (как это делается в правиле трех сигм). Нужно найти такое положительное число δ , чтобы с вероятностью β можно было утверждать, что истинное математическое ожидание m_x попадает в интервал $(\bar{m}_x - \delta, \bar{m}_x + \delta)$, т. е. $\bar{m}_x - \delta < m_x < \bar{m}_x + \delta$; тогда выполняется неравенство $|m_x - \bar{m}_x| < \delta$, и m_x от $\bar{m}_x$ отличается на величину, меньшую, чем δ .

В дальнейшем поясним, какой смысл вкладывается в последнее утверждение. В этом есть необходимость, так как m_x и $\bar{m}_x$ не являются случайными величинами и нельзя говорить о вероятности выполнения указанного неравенства.

Число β называется *доверительной вероятностью*, интервал $(\bar{m}_x - \delta, \bar{m}_x + \delta)$ — *доверительным интервалом*.

Пусть испытания проводятся сериями по n испытаний, в каждой серии получается своя табл. 24.1 со своими значениями для X , при этом полагаем, что число n достаточно большое ($n > 50$). Например, в одной серии это будут значения $x_1, x_2, \dots, x_n$; в другой серии значения $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$; в следующей серии в табл. 24.1 мы получим другие числа $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$. Поэтому появляющиеся в первых испытаниях серий числа $x_1, x_1^1, x_1^2, \dots$ можно рассматривать как значения некоторой случайной величины X_1 ; появляющиеся во вторых испытаниях числа $x_2, x_2^1, x_2^2, \dots$ будем рассматривать как значения другой случайной величины X_2 ; наконец, $x_n, x_n^1, x_n^2, \dots$ будем рассматривать как значения

некоторой величины X_n . Из них образуем новую случайную величину (среднее арифметическое исходных)

$$\overline{M}_x = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}. \quad (24.17)$$

Случайные величины в числителе правой части этой формулы в каждой серии принимает значения из некоторой табл. 24.1, поэтому число $\overline{m}_x$, определенное по формуле (24.11), есть одно из возможных значений $\overline{M}_x$. Замечая, что значение случайной величины X_i есть значение X в i -м испытании каждой серии, будем считать, что только что введенные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют один и тот же закон распределения, совпадающий с искомым законом распределения изучаемой величины X , тогда $M(X_i) = M(X) = m_x$, $i = 1, \dots, n$, и их дисперсии $D(X_i) = D(X)$, $i = 1, \dots, n$. Запишем математическое ожидание величины $\overline{M}_x$, используя свойства математического ожидания:

$$\begin{aligned} M(\overline{M}_x) &= M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \\ &= n \cdot \frac{m_x}{n} = m_x. \end{aligned}$$

Итак,

$$M(\overline{M}_x) = m_x. \quad (24.18)$$

Аналогично запишем дисперсию случайной величины $\overline{M}_x$, при этом учтем, что при вынесении за знак дисперсии постоянная величина $1/n$ возводится в квадрат:

$$D(\overline{M}_x) = D(X)/n. \quad (24.19)$$

Так как согласно (24.17) случайная величина $\overline{M}_x$ представляет собой сумму большого числа n случайных величин с одним и тем же законом распределения, то по теореме Ляпунова для случайной величины $\overline{M}_x$ будем иметь закон распределения, мало отличающийся от нормального. Таким образом, плотность распределения вероятностей $\overline{M}_x$ приближенно определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Здесь a и σ^2 — математическое ожидание и дисперсия величины $\overline{M}_x$, поэтому согласно (24.18) и (24.19)

$$a = M(\overline{M}_x) = m_x, \quad (24.20)$$

$$\sigma^2 = D(\overline{M}_x) = \frac{D(X)}{n}, \quad (24.21)$$

где m_x , $D(X)$ — искомые математическое ожидание и дисперсия изучаемой величины X . Для случайной величины $\overline{M}_x$ с указанным

нормальным законом распределения запишем вероятность попадания ее в интервал (α, β) через функцию Лапласа (§ 23.5):

$$P(\alpha < \overline{M}_x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (24.22)$$

Формулу (24.22) запишем для интервала $(m_x - \delta, m_x + \delta)$, где δ — введенное выше число. Для этого в (24.22) положим $\alpha = m_x - \delta$, $\beta = m_x + \delta$, учтем (24.20), (24.21) и получим

$$P(m_x - \delta < \overline{M}_x < m_x + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D(X)/n}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sqrt{D(X)/n}}\right).$$

В силу нечетности $\Phi(x)$ будем иметь

$$P(m_x - \delta < \overline{M}_x < m_x + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D(X)/n}}\right). \quad (24.23)$$

Неравенства $m_x - \delta < \overline{M}_x < m_x + \delta$ нетрудно преобразовать к виду $\overline{M}_x - \delta < m_x < \overline{M}_x + \delta$. Это неравенство равносильно предыдущему, поэтому из (24.23) получим

$$P(\overline{M}_x - \delta < m_x < \overline{M}_x + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D(X)/n}}\right). \quad (24.24)$$

Потребуем, чтобы вероятность в левой части этого неравенства была равна указанному выше числу β :

$$P(\overline{M}_x - \delta < m_x < \overline{M}_x + \delta) = \beta, \quad (24.25)$$

тогда из (24.24) следует $\Phi(\delta/\sqrt{D(X)/n}) = \beta/2$. Зная число $\beta/2$, из таблиц значений для функций Лапласа $\Phi(x)$ найдем значение аргумента функции

$$\frac{\delta}{\sqrt{D(X)/n}} = A. \quad (24.26)$$

где A — число, найденное нами из таблиц. Если в (24.26) известно значение дисперсии $D(X)$, найдем δ . Но если $D(X)$ неизвестно, то это число в (24.26) приближенно заменим на число $\overline{D}(X)$, определяемое согласно (24.12), и тогда из (24.26) найдем приближенно искомое число δ .

Итак, пусть (хотя бы приближенно) число δ найдено. Согласно (24.25) вероятность события $\overline{M}_x - \delta < m_x < \overline{M}_x + \delta$ равна β , например, равна 0,997, т. е. числу, близкому к единице. Следовательно, это неравенство, как правило, будет выполняться, так как вероятность

очень близка к единице. Но $\overline{m}_x$ есть одно из возможных значений $\overline{M}_x$. Это означает, что неравенство

$$\overline{m}_x - \delta < m_x < \overline{m}_x + \delta \quad (24.27)$$

включается в неравенство в левой части (24.25):

$$\overline{M}_x - \delta < m_x < \overline{M}_x + \delta.$$

В этом смысле понимается выполнение неравенства (24.27) с вероятностью β . Определив число δ , входящее в (24.27), оценим погрешность, возникающую при замене m_x на $\overline{m}_x$ из формулы (24.11).

Существует интервальная оценка для математического ожидания изучаемой случайной величины X с нормальным законом при неизвестной дисперсии $D(X)$, полученная без использования $\overline{D}(X)$. Эту оценку не приводим. Аналогичную интервальную оценку можно получить и для дисперсии $D(X)$. Если X — случайная величина с нормальным законом распределения, то, вычислив по формулам (24.11), (24.12) величины $\overline{m}_x$ и $\overline{D}(X)$ — приближенные значения соответственно истинных математического ожидания m_x и дисперсии $D(X)$ случайной величины X , — непосредственно найдем приближенно закон распределения этой случайной величины. Интервальные оценки для m_x , $D(X)$ позволяют оценить допускаемую при этом погрешность.

Пример. Произведено $n = 36$ измерений величины X . По данным выборки найдены $\overline{m}_x = 10,78$, $\overline{D}(X) = 0,064$. Требуется построить доверительный интервал для математического ожидания m_x , соответствующий доверительной вероятности $\beta = 0,8$.

Вычисляем $\sqrt{\overline{D}(X)} = 0,253$, $\sqrt{\overline{D}(X)} / \sqrt{n} = 0,253/6 = 0,042$. По формуле $2\Phi(\delta\sqrt{n} / \sqrt{\overline{D}(X)}) = \beta$ имеем $\Phi(\delta/0,042) = 0,4$. Из таблиц значений функции Лапласа найдем значение аргумента $\delta/0,042 = 1,28$, соответствующее значению 0,4 функции; $\delta = 1,28 \cdot 0,042 \approx 0,054$.

Итак, доверительный интервал для заданной вероятности $\beta = 0,8$ будет $\overline{m}_x - 0,054 < m_x < \overline{m}_x + 0,054$, т. е. $10,726 < m_x < 10,834$.

§ 24.4. О сходимости по вероятности статистического среднего и статистической дисперсии. Состоятельные, несмещенные и эффективные оценки

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой отыскивается. Согласно § 24.2 найдем $\overline{m}_x$, $\overline{D}(X)$. Введем в рассмотрение случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, означающие то же, что и в § 24.3, по отношению к X . Среднее арифметическое этих величин есть

случайная величина $\overline{M}_x = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$, ее математическое ожидание (при $M(X_i) = M(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$)

$$M(\overline{M}_x) = \frac{M(\overline{X}_1) + M(\overline{X}_2) + \dots + M(\overline{X}_n)}{n} = M(X) = m_x.$$

Согласно теореме Чебышёва величина $\overline{M}_x$ сходится по вероятности к $M(\overline{M}_x) = m_x$. Введя в рассмотрение случайную величину $\overline{D}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M}_x)^2$, можно показать, что она сходится по вероятности к дисперсии $D(X)$.

Поскольку $\overline{m}_x$ есть возможное значение $\overline{M}_x$, величину $\overline{M}_x$ также будем называть *точечной оценкой неизвестного математического ожидания* $m_x = M(X)$. Аналогично $\overline{D}_x$ будем называть *точечной оценкой неизвестной дисперсии* $D(X)$. Как показано выше, $\overline{M}_x$ сходится по вероятности к оцениваемой величине m_x , такую оценку называют *состоятельной*. Величина $\overline{D}_x$ также является состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$. Как мы видели, $M(\overline{M}_x) = m_x$, т. е. математическое ожидание точечной оценки $\overline{M}_x$ равно оцениваемому параметру m_x . Такую оценку называют *несмещенной* (она выбирается с целью избежать систематических ошибок в сторону завышения или занижения).

По аналогии с выражением для $\overline{D}_x$ введем в рассмотрение случайную величину

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M}_x)^2,$$

для которой указанное в конце § 24.2 число s^2 есть возможное значение, назовем ее также точечной оценкой неизвестной дисперсии $D(X)$. Непосредственный подсчет показывает, что математическое ожидание $M(S^2) = D(X)$; следовательно, S^2 — несмещенная оценка. Нетрудно проверить, что $\overline{D}_x$ не является несмещенной оценкой.

Несмещенная оценка называется *эффективной*, если ее дисперсия является наименьшей по сравнению с дисперсиями других несмещенных оценок. Можно показать, что, если случайная величина X имеет нормальный закон распределения, то оценка $\overline{M}_x$ является эффективной.

§ 24.5. Проверка статистических гипотез

Некоторые свойства изучаемой вероятностной модели, касающиеся законов распределения случайных величин, параметров распределения часто формулируются в виде гипотез. Эти гипотезы подвергаются статистической проверке, при которой используются опытные данные (выборка) и различные статистические критерии. Одним из основных

понятий статистической проверки гипотез является понятие критерия проверки.

Критерием проверки D называется некоторый статистический показатель, являющийся числовой мерой отклонения, различия между выборочным распределением и гипотетическим распределением, относительно которого предполагается, что подлежащая проверке гипотеза верна (ниже будет рассмотрен пример на построение критерия). Критерий D , естественно, зависит от выборочных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины и поэтому является случайной величиной. Если закон распределения D известен, то для любого D_0 можно найти вероятность β события $D > D_0$:

$$P(D > D_0) = \beta. \quad (24.28)$$

Очевидно, что β с увеличением D_0 уменьшается. Выберем β столь малой (D_0 большим), чтобы можно было считать несомненным, что с вероятностью β указанное событие не произойдет в единичном опыте (обычно β принимают равным 0,05 или 0,01 и т.п.). Задавшись вероятностью β , можно найти $D_0 = D_0(\beta)$ из (24.28) согласно известному закону распределения величины D . Пусть D_n — фактическое значение критерия D , вычисленное по выборочным данным. Если окажется, что $D_n > D_0(\beta)$, то мы приходим к выводу, что наша гипотеза *опровергнута опытом*: в единичном случае произошло событие, вероятность которого очень мала. Если же $D_n \leq D_0(\beta)$, то будем считать, что гипотеза согласуется с опытными данными. Вероятность β называется уровнем значимости. Таким образом, *уровень значимости β* — это вероятность того, что критерий D принимает значения, при которых проверяемая гипотеза отвергается.

Замечание. Отвергаемая гипотеза может оказаться правильной и вероятность β является, таким образом, вероятностью, с которой отвергается правильная гипотеза (ошибка первого рода).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть некоторый эксперимент имеет m элементарных исходов $w_1, w_2, \dots, w_m$. Вероятности этих исходов точно неизвестны, но имеются некоторые основания считать, что они равны $p_1, p_2, \dots, p_m$. Для проверки гипотезы о том, что вероятности событий w_k равны p_k ($k = 1, 2, \dots, m$), произведено n независимых испытаний. Пусть m_k — число появления события w_k в этих испытаниях $k = 1, 2, \dots, m$. Относительная частота m_k/n появления события w_k при больших n согласно теореме Бернулли, близка к неизвестной вероятности, предполагаемое значение которой равно p_k . Пирсон показал, что сумма

$$\sum_{k=1}^m \frac{n}{p_k} \left(\frac{m_k}{n} - p_k \right)^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$$

является подходящей мерой расхождения между наблюдаемыми частотами m_k/n и гипотетическими вероятностями p_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и обладает замечательными свойствами: при больших n ее распределение приближенно равно так называемому χ^2 -распределению (читается: «хи-квадрат» распределению).

Это распределение определяется так. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с нормальным законом распределения, причем у каждой из них математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Тогда говорят, что величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ распределена по закону χ^2 .

Плотность χ^2 -распределения определяется формулами:

$$k_n(x) = \begin{cases} b_n x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

где константа b_n определяется из условия, что $\int_{-\infty}^{\infty} k_n(x) dx = 1$. Параметр n , принимающий целые положительные значения, называется *числом степеней свободы χ^2 -распределения*.

Справедлива

Теорема 24.1 (Пирсона). Пусть случайный эксперимент имеет m элементарных исходов w_k , вероятности которых равны p_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Если в n независимых испытаниях событие w_k появляется m_k раз ($k = 1, 2, \dots, m$), то при $n \rightarrow \infty$ распределение суммы χ_{m-1}^2 , определяемой равенством

$$\chi_{m-1}^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k} \quad (24.29)$$

стремится к χ^2 -распределению с $(m - 1)$ степенями свободы.

Эта теорема (принимаемая без доказательства) лежит в основе статистической проверки гипотезы о том, что та или иная выборка (n наблюдений) является выборкой из совокупности возможных значений некоторой случайной величины X , имеющей данное теоретическое распределение (предполагаемое гипотезой). Величина (24.29) является критерием проверки гипотезы о законе распределения случайной величины X , а статистический метод проверки этой гипотезы, основанный на использовании суммы χ_{m-1}^2 , называется *критерием согласия χ^2* , или *критерием Пирсона*.

При практическом применении критерия Пирсона обычно принимают уровень значимости $\beta = 0,05$ или $0,01$ или $0,001$. Задавшись

уровнем значимости β и, зная число степеней свободы $m - 1$ определяем критическое значение $\chi_{m-1,\beta}^2$, такое, что $P(\chi_{m-1}^2 > \chi_{m-1,\beta}^2) = \beta$. И если фактическое значение критерия χ_{m-1}^2 , вычисленное по формуле (24.29) (по опытным данным $n, m_1, \dots, m_k$), превосходит $\chi_{m-1,\beta}^2$, то гипотеза отвергается. В противном случае, т.е. если $\chi_{m-1}^2 \leq \chi_{m-1,\beta}^2$, гипотеза считается совместимой с опытными данными. При нахождении критического значения $\chi_{m-1,\beta}^2$ пользуются специальной таблицей критических точек распределения χ^2 (табл. П.2).

Пример 1. При 12000 бросаниях монеты Пирсон получил 6019 выпадений герба. Согласуется ли этот результат с гипотезой о том, что вероятность выпадения герба равна 0,5 (при уровне значимости $\beta = 0,05$)?

Решение. При каждом бросании монеты имеются два исхода: w_1 — герб, w_2 — решетка, т.е. $m = 2$. Этим исходам соответствует гипотеза $p_1 = p_2 = 0,5$. В рассматриваемом случае $n = 12000$, $m_1 = 6019$, $m_2 = n - m_1 = 5981$ и критерий проверки

$$\chi_1^2 = \frac{(m_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(m_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{19^2}{6000} + \frac{19^2}{6000} = 0,12.$$

Из таблицы при $\beta = 0,05$; $m - 1 = 2 - 1 = 1$ находим: $\chi_{1,\beta}^2 = 3,84$. Значение $\chi_1^2 = 0,12$, полученное из опыта, меньше критического значения $\chi_{1,\beta}^2 = 3,84$: $\chi_1^2 < \chi_{1,\beta}^2$. Следовательно, гипотеза согласуется с опытными данными.

Если с помощью критерия Пирсона проверяется гипотеза о том, что случайная величина X имеет данное теоретическое распределение (предполагаемое гипотезой), то поступают следующим образом: некоторый интервал $[a, b]$, содержащий все выборочные значения, разбивается на m интервалов l_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Тогда под m_k в выражении (24.29) для критерия проверки понимается число выборочных значений, попавших в интервал l_k ; а p_k есть вероятность попадания X в интервал l_k , которую вычисляют, используя предполагаемое гипотезой теоретическое распределение.

Кроме того, в формулировке теоремы Пирсона χ_{m-1}^2 заменяется на χ_{m-1-r}^2 — распределение с $(m - 1 - r)$ степенями свободы, где r — число параметров предполагаемого распределения. Если предполагаемое распределение является нормальным, то $r = 2$, так как по выборке оценивают два параметра a, σ .

Пример 2. Из некоторой генеральной совокупности извлечена выборка объемом 200 элементов (табл. 24.4).

Таблица 24.4

Интервал	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)	[12, 14)	[14, 16)	[16, 18)	[18, 20)	[20, 22]
m_k	15	26	25	30	26	21	24	20	13

По данным выборки проверить гипотезу (с уровнем значимости $\beta = 0,01$) о том, что случайная величина в генеральной совокупности распределена по нормальному закону.

Решение. Для вычисления вероятностей p_k необходимо вычислить параметры a, σ , определяющие нормальный закон распределения. Их оценки $\bar{m}_x, \bar{D}(X)$ вычислим по выборке на основании формул (24.13), (24.14), в которых $\bar{x}_k = (x_k + x_{k+1})/2, p_k^* = m_k/n, n = 200$, и найдем:

$$\bar{m}_x = \frac{1}{200} \sum_{k=1}^9 \bar{x}_k m_k = 12,6; \quad \bar{D}(X) = \frac{1}{200} \sum_{k=1}^9 (\bar{x}_k - \bar{m}_x)^2 m_k = 22,04;$$

$$\sqrt{\bar{D}(X)} = 4,7.$$

Находим, $p_k, k = 1, 2, \dots, 9$. Так как случайная величина X определена в интервале $(-\infty, \infty)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменим на $(-\infty, 6)$ и $[20 + \infty)$. Имеем:

$$p_1 = \Phi\left(\frac{6 - 12,6}{4,7}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1,41) + 0,5 = 0,5 - 0,4207 = 0,0793;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{8 - 12,6}{4,7}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 12,6}{4,7}\right) = \Phi(-0,99) - \Phi(-1,41) =$$

$$= 0,4207 - 0,3389 = 0,0818.$$

Аналогично

$$p_3 = 0,1266; \quad p_4 = 0,1606; \quad p_5 = 0,1658;$$

$$p_6 = 0,15; \quad p_7 = 0,109; \quad p_8 = 0,069;$$

$$p_9 \approx P(20 < X < +\infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{20 - 12,6}{4,7}\right) =$$

$$= 0,5 - \Phi(1,57) = 0,5 - 0,442 = 0,058.$$

Полученные данные приведены в табл. 24.5.

$$\text{Вычислим } \chi_{\text{набл}}^2 = \sum_{k=1}^9 \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k} \approx 13,3.$$

Таблица 24.5

Интер- вал	$(-\infty, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 10)$	$[10, 12)$	$[12, 14)$	$[14, 16)$	$[16, 18)$	$[18, 20)$	$[20, \infty)$
m_k	15	26	25	30	26	21	24	20	13
np_k	15,860	16,36	25,32	32,12	33,16	30	21,8	13,8	11,6

Определим число степеней свободы. По выборке определены два параметра, т.е. $r = 2$; количество интервалов $m = 9$; следовательно, $k = m - 1 - r = 9 - 1 - 2 = 6$. Зная, что $\beta = 0,01$, $k = 6$, по таблице χ^2 -распределения находим $\chi^2_{\beta,k} = \chi^2_{0,01;6} = 16,8$. Итак, $\chi^2_{\text{набл}} = 13,3 < 16,8 = \chi^2_{\beta,k}$; следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальный закон распределения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Т а б л и ц а П.1

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980

Таблица П.1 (продолжение)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292
1,48	0,4306	1,76	0,4608	2,08	0,4812	2,64	0,4959
1,49	0,4319	1,77	0,4616	2,10	0,4821	2,66	0,4961
1,50	0,4332	1,78	0,4625	2,12	0,4830	2,68	0,4963
1,51	0,4345	1,79	0,4633	2,14	0,4838	2,70	0,4965

Таблица П.1 (окончание)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,52	0,4357	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,72	0,4967
1,53	0,4370	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,74	0,4969
1,54	0,4382	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,76	0,4971
1,55	0,4394	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,78	0,4973
1,56	0,4406	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,80	0,4974
1,57	0,4418	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,82	0,4976
1,58	0,4429	1,86	0,4686	2,28	0,4887	2,84	0,4977
1,59	0,4441	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,86	0,4979
1,60	0,4452	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,88	0,4980
1,61	0,4463	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,90	0,4981
1,62	0,4474	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,92	0,4982
1,63	0,4484	1,91	0,4719	2,38	0,4913	2,94	0,4984
1,64	0,4495	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,96	0,4985
1,65	0,4505	1,93	0,4732	2,42	0,4922	2,98	0,4986
1,66	0,4515	1,94	0,4738	2,44	0,4927	3,00	0,49865
1,67	0,4525	1,95	0,4744	2,46	0,4931	3,20	0,49931
1,68	0,4535	1,96	0,4750	2,48	0,4934	3,40	0,49966
1,69	0,4545	1,97	0,4756	2,50	0,4938	3,60	0,499 841
1,70	0,4554	1,98	0,4761	2,52	0,4941	3,80	0,499 928
1,71	0,4564	1,99	0,4767	2,54	0,4945	4,00	0,499 968
1,72	0,4573	2,00	0,4772	2,56	0,4948	4,50	0,499 997
1,73	0,4582	2,02	0,4783	2,58	0,4951	5,00	0,499 997
1,74	0,4591	2,04	0,4793	2,60	0,4953		
1,75	0,4599	2,06	0,4803	2,62	0,4956		

Таблица П.2

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берман А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа. Для вузов. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Т. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Дрофа, 2003. — 285 с.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Дрофа, 2003. — 509 с.
4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Дрофа, 2003. — 511 с.
5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1988. — 480 с.
6. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2004. — 479 с.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Для вузов. Т. 1. — М.: Интеграл-пресс, 2001. — 416 с.
8. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Для вузов. Т. 2. — М.: Интеграл-пресс, 2001. — 544 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 679 с.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 864 с.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 728 с.
12. *Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1978. — 384 с.
13. *Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики. Т. 2. — М.: Высшая школа, 1978. — 328 с.